5. ESTRUTURAÇÃO DO MODELO

Cada unidade de exploração terá de ser desmontada de baixo para cima em sucessivos «cortes» ou «plantas», de altura fixa ao longo de toda a vida do jazigo e comum em todas as suas unidades de exploração, fixação essa que é consequência da normalização do material de perfuração a usar e da forma de carregamento dos tiros de cada pega de fogo. A tonelagem assim abatida, em cada «corte» ou «planta» do «cut and fill», é função apenas da secção do «céu» de cada câmara de desmonte e não da secção do «céu» da unidade de exploração e será constante em cada «corte» ou «planta» dessa mesma câmara, pois em termos médios genéricos pode-se dizer que a secção de cada câmara é constante ao longo de toda a sua vida (a excepção a esta generalidade são as «franjas» do jazigo).

Por motivos de segurança é conveniente ter-se sempre cheias de minério as toldas de descarga, isto é, ao dar-se início ao carregamento do minério abatido em dado «corte» ou «planta», a tolda da câmara deverá estar ainda cheia com o último minério carregado do «corte» ou «planta» anterior e, ao terminar o carregamento do minério abatido, deve ficar por retirar da tolda o minério suficiente para que a tolda fique cheia até ao início do carregamento do «corte» ou «planta» seguinte. Assim, desprezando o início e o final da vida de cada piso, é lícito considerar que em cada fase de carregamento de minério, a quantidade total «carregada» da unidade de exploração é exactamente a quantidade abatida por «corte» ou «planta», para além apenas do acréscimo de altura das toldas de «corte» para «corte» e que é verdadeiramente insignificante em face da tonelagem movimentada em cada fase de carregamento.

Portanto, a cada fase de carregamento na câmara corresponde igual período de carregamento de vagonas na galeria de rolagem, vagonas essas que serão comboiadas para o poço de extracção. A este poço chegará, com origem na unidade X_i, a tonelagem $\frac{T_{i_x}}{2}$ em cada fase de carregamento de cada uma das câmaras da unidade, admitindo igualdade no valor da secção de cada uma daquelas duas câmaras de desmonte (a excepção a esta generalidade são ainda as «franjas» do jazigo).

Adicionalmente é condição desejável a utilização de frota de rolagem constante, quer de locomotivas, quer de vagonetas, em cada piso, mas compatível com a condição imposta da constância de e_i, com plena utilização durante toda a vida do piso (ou parte do mesmo).

Nestas condições, é aplicável o teorema:

«As condições de exaustão do jazigo (piso, no nosso caso) e a de manutenção da frota constante implicam que o centro de massas do jazigo se mantenha constante».

Este teorema está devidamente demonstrado pelos autores que temos vindo a citar na sua 2.ª comunicação ao I CHILAGE, intitulada «Um método de programação de desmontes», e é aplicável ao caso que apontamos desde que se admita o que se tem vindo a expôr.

Mas a estacionaridade da frota de rolagem utilizada não deve ser o único objectivo, pois interessa que o desmonte seja conduzido por forma a manter estacionários outros parâmetros como, por exemplo, o teor de um dado elemento no tal-qual extraído do piso. E os mesmos autores, no mesmo trabalho citado, generalizaram a aplicação do teorema anterior para quaisquer outros parâmetros, através da consideração de que o valor médio do parâmetro escolhido (qualquer que seja o parâmetro, repita-se), com o minério todo do piso explorado por um único acto de exploração, define um α como a distância a uma origem arbitrária de um novo centro de massas no espaço dos valores do parâmetro escolhido (teores de um dado elemento, por exemplo); portanto, para que o centro de massas, nesse espaço se mantenha estacionário (isto é, após cada acto de exploração, o piso quanto ao parâmetro escolhido, seja uma réplica do piso original) e para que o valor do parâmetro escolhido do minério transportado se mantenha constantemente igual a α, é necessário que, em cada acto de exploração se verifique:

$$\alpha = \frac{\Sigma\, e_i\, \alpha_i}{\Sigma\, e_i}$$

E assim se construirá um sistema de equações que representa o conjunto de relações estruturantes que definem as associações permitidas entre unidades de exploração de cada piso, reduzindo substancialmente o número de combinatórias possíveis. Está assim ultrapassado o método aproximativo clássico, que supõe a massa do piso concentrada no seu centro de massas e arbitra a distância desse ponto ao ponto de descarga (poço de extracção), resolvendo, em primeira aproximação, o problema da definição da frota, mas nada dizendo sobre a distribuição da frota de modo a manter constante o centro de massas do piso nem as características médias do material desmontado e extraído; para além de passarmos a possuir um método científico, abandonando o carácter aproximativo do método clássico. Note-se ainda que, quanto maior for o número de parâmetros considerados, maior é a complexidade do cálculo dos fluxos de minério das diversas unidades do piso, e a aproximação clássica é incapaz de resolver o problema de forma aceitável.

Por outro lado, o método científico exposto permite sempre, pelo menos teoricamente, encontrar a solução ideal para aquele problema, bastando para tal resolver e encontrar a solução do sistema de equações constituído pelas relações estruturantes que definem as associações permitidas entre unidades de exploração de cada piso, nas condições já referidas anteriormente; registe-se que este será um sistema de β equações a β incógnitas, sendo β o número de parâmetros considerados. Teoricamente haverá solução para este sistema de equações, mas é evidente que a sua compatibilidade prática, em geral, não existirá, pelo que a resolução de um problema concreto ter-se-á de fazer pela seguinte forma:

a) à custa de uma das equações apenas, definir as combinações possíveis;

b) das combinações possíveis anteriores considerar apenas aquelas que satisfaçam a uma das equações restantes, obrigatoriamente mais fraca que a equação considerada em *a*);

c) e assim sucessivamente até ao ponto desejado, mas tendo em atenção que, quanto mais avançarmos na restrição da combinatória, menor será o número de combinações possíveis.

Assim, a sensibilidade do calculador manifestar-se-á na escolha do ponto de paragem na sucessiva restrição da combinatória, mas haverá sempre a possibilidade de se recorrer ao aumento do desvio admissível (1) para cada parâmetro, de forma a elevar o número de combinações utilizáveis.

Para além das restrições assim impostas, há sempre ainda a possibilidade de impôr outras restrições de natureza tecnológica, que também irão diminuir o número de combinações permitidas. É o caso, por exemplo, da existência obrigatória de uma pá auto-carregadora em cada unidade de exploração e que não poderá trabalhar simultaneamente nas duas câmaras da sua unidade de exploração, pelo que serão eliminadas combinações de unidades que conduzam a excessivas ou deficitárias necessidades de carregamento.

6. PLANIFICAÇÃO DAS FROTAS E SUA DISTRIBUIÇÃO

Já anteriormente referimos, mais de uma vez, o interesse e a necessidade de determinação da frota ideal para a exploração racional de um jazigo, logo de um piso no nosso caso. E temos de distinguir os dois tipos de frota existentes numa lavra subterrânea: a de carregamento e a de rolagem. Ambas importantes e com o mesmo grau de indispensabilidade. Vamos referi-las separadamente, embora para ambas o problema se possa equacionar com um objectivo idêntico: estabelecer a frota necessária para a taxa e rendimento constantes, desmontar totalmente o piso em causa e, posteriormente, distribuir por esse piso, ao longo do tempo, essa frota, ou seja, estabelecer as taxas de desmonte em cada unidade de exploração de forma a manter constantes as características consideradas na estruturação do nosso modelo tal como foi feito em 5.

6.1. FROTA DE CARREGAMENTO

Como condição prévia aceitamos que a frota é constituída, em cada piso, qualquer que seja o seu número de unidades de exploração, por pás auto-carregadoras iguais.

Segundo um esquema do tipo do constante da fig. 5, um ciclo da pá auto-carregadora, na fase de carregamento de minério, na unidade X_i do piso i, é definido por:

$$z_{i_x} = t_o + \frac{l_{i_x}}{v} = \frac{t_o V + l_{i_x}}{v}$$

e a capacidade de transporte, na unidade de tempo, dessa pá auto-carregadora é dada por:

$$p_{i_x} = \frac{\varphi \eta}{z_{i_x}} = \frac{\varphi \eta v}{t_o v + l_{i_x}}$$

---

(1) — O desvio γ admissível, por exemplo, para o caso do parâmetro α é introduzido na equação definidora de α do seguinte modo:

$$\alpha \pm \gamma = \frac{\Sigma e_i \ \alpha_i}{\Sigma e_i}$$

e o número de pás auto-carregadoras é dado por:

— na unidade X_i:

$$n_{i_x} = \frac{e_{i_x}}{p_{i_x}} = \frac{e_{i_x}\ z_{i_x}}{\varphi\ \eta} = \frac{t_o\ V\ e_{i_x} + e_{i_x}\ l_{i_x}}{\varphi\ \eta\ v}$$

— no piso i:

$$n_i = \Sigma\ n_{i_x} = \frac{1}{\varphi\ \eta}\ \Sigma\ e_{i_x}\ z_{i_x}$$

mas este somatório $\sum e_{i_x} z_{i_x}$ é reduzido, no máximo, a dois termos, porque, para se manter a produção com características médias semelhantes ao longo do tempo deve bastar trabalharmos com o mínimo de

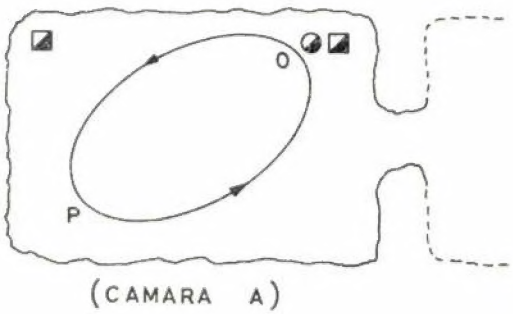


Fig. 5

Esquema de um ciclo de uma pá auto-carregadora na fase de carregamento na câmara A da unidade X_i

P— ponto de carga; O— tolda (ponto de descarga)
OP— distância a percorrer em vazio
PO— distância a percorrer em carga
l_{i_x}= OP + PO —distância de carregamento a considerar na unidade X_i

duas unidades de exploração diferentes simultaneamente (o uso de maior número de unidades deverá complicar a rolagem no piso, exigindo grande disciplina de utilização do equipamento, sinalização especial, etc...).

Eliminando z_{i_x} teremos:

$$n_i = \Sigma\ n_{i_x} = \frac{1}{\varphi\ \eta\ v}\ \Sigma\ e_{i_x}\ (t_o v + l_{i_x}) = \frac{e_i\ t_o v + \Sigma\ e_{i_x}\ l_{i_x}}{\varphi\ \eta\ v}$$

pois por definição, $e_i = \Sigma\ e_{i_x}$

A frota constante no piso obriga-nos a que n_i = constante, para o que terá que ser $\Sigma\ e_{i_x}\ l_{i_x}$ = constante = Z, constante esta (Z) que irá, verdadeiramente, determinar a frota, pelo que há que lhe atribuir um valor para esse efeito. Essa atribuição é feita considerando que a exploração do piso i em questão é uma sucessão no tempo de actos de exploração e que em cada um desses actos deve ser cumprida a mesma constância de Z;

Se assim for é sempre possível explorar o piso até à exaustão (1). A totalidade dos actos de exploração, conduzindo à exaustão do piso, exprime-se por:

$$m\,Z = \Sigma\ R_{i_x}\ l_{i_x}$$

(1) — É evidente que não se explorarão os pilares, maciços de protecção, etc., não considerados quando se fala em exaustão de um piso e não contabilizados nas reservas exploráveis.

onde m representa o número de actos de exploração:

$$\Sigma\ e_{i_x}\ l_{i_x} + \Sigma\ e_{i_x}\ l_{i_x} + \ldots + \Sigma\ e_{i_x}\ l_{i_x} = \Sigma\ R_{i_x}\ l_{i_x}$$

mas como já temos:

$$\begin{cases} \Sigma\ e_{i_x} = e_i \\ m\ e_i = \Sigma\ R_{i_x} \end{cases}$$

pode-se escrever:

$$Z\ \Sigma\ R_{i_x} = e_i\ \Sigma R_{i_x}\ l_{i_x}$$

$$Z = e_i\ \overline{L}_i \text{ ou seja } \Sigma\ e_{i_x}\ l_{i_x} = e_i\ \overline{L}_i$$

donde:

$$L_i = \frac{\Sigma\ e_{i_x}\ l_{i_x}}{e_i}$$

e a frota necessária fica definida por:

$$\boxed{n_i = \frac{e_i\ (vt_o + \overline{L}_i}{\varphi\ \eta\ v}} \qquad \text{(A)}$$

pois já tinhamos provado que:

$$n_i = \frac{e_i\ t_o v + \Sigma\ e_{i_x}\ l_{i_x}}{\varphi\ \eta\ v}$$

Para esta definição do cálculo da frota necessária (n_i) para desmontar todo o piso i ser coerente, resta demonstrar a afirmação feita anteriormente de que era possível desmontar a totalidade do piso por actos elementares de exploração, obedecendo à condição

$$Z = \Sigma\ e_{i_x}\ l_{i_x} = \text{constante}$$

ou:

$$\overline{L}_i = \frac{\Sigma\ e_{i_x}\ l_{i_x}}{e_i}$$

mas tal já foi feito pelos autores que temos vindo a citar na sua comunicação «Um método de programação de desmontes» ao I CHILAGE, para o que bastou partirem da definição do centro de massas de um jazigo (piso, no nosso caso) no início do seu desmonte:

$\sum_{x=1}^{Y} R_{i_x}\ l_{i_x} = R_i\ \overline{L}_i$ onde Y é o número total de unidades de exploração em consideração no piso i.

Em resumo, a frota escolhida de acordo com a relação (A), que representa a frota necessária para desmontar um piso é a estritamente necessária e trabalhará a rendimento constante, desde que se tomem disposições para permitir que o valor de η adoptado em (A) seja o efectivamente verificado na prática; os actos de exploração podem incidir, em qualquer momento, sobre quaisquer unidades de exploração desde que a condição $\Sigma\ e_{i_x}\ l_{i_x} = e_i\ \overline{L}_i$ seja cumprida e, como corolário, $\overline{L}_i$ manter-se-á constante ao longo da vida do piso.

Temos, assim, a frota de carregamento definida, constante ao longo do tempo de vida do piso i, capaz de desmontar o piso à taxa de exploração e_i. Resta definir a distribuição dessa frota, mas para tal, intrinsecamente, basta que essa distribuição satisfaça a relação:

$$\Sigma\ e_{i_x}\ l_{i_x} = e_i\ \overline{L}_i$$

já atrás referida. Mas para que o piso forneça sempre minério com características constantes e iguais à média global, haverá que satisfazer outros requisitos. Estes, normalmente, dizem respeito a rendimentos em peso e a teores de dados elementos químicos, mas sejam eles quais forem são de considerar cada um como um dos parâmtros α largamente debatidos atrás quando tratámos da estruturação do nosso modelo.

Por exemplo, em matéria de um rendimento em peso μ como parâmetros teríamos:

$$\overline{\mu_i} = \frac{\Sigma\ e_{i_x}\ \mu_{i_x}}{\Sigma\ e_{i_x}}$$

e, de seguida, em matéria de um teor de concentrados C como parâmetro teríamos:

$$\overline{C_i} = \frac{\Sigma\ e_{i_x}\ \mu_{i_x}\ C_{i_x}}{\Sigma\ e_{i_x}\ \mu_{i_x}}$$

e assim sucessivamente até possuirmos o sistema de equações falado quando da estruturaço do nosso modelo, sistema esse que uma das equações será a ligação:

$$\frac{\Sigma\ e_{i_x}\ l_{i_x}}{\Sigma\ e_{i_x}} = \overline{L_i}$$

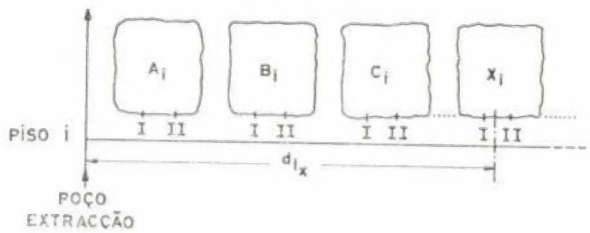
e recorda-se que para satisfazer simultaneamente todas as equações do sistema deverá ter de se admitir uma certa variação em todas ou em algumas das características consideradas (é a questão falada de termos $\alpha \pm \gamma$).

6.2. FROTA DE ROLAGEM

Como condição prévia teremos de aceitar novamente que, em cada piso, o equipamento disponível (locomotivas e vagonas) são iguais.

A fig. 6 procura representar um ciclo de rolagem normal no piso i, ciclo esse que é definido, em relação à unidade de exploração genérica X_i, por:

$$\tau'_{i_x} = t_{1_{i_x}} + t_{2_{i_x}} + t_3 = d_{i_x}\left(\frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_1}\right) + t_3 = \frac{(K+1)\ d_{i_x}}{K\ v_1} + t_3 = \frac{K\ v_1\ t_3 + (K+1)_{i_x}}{K\ v_1}$$



I e II — ponto de chegada das toldas das duas câmaras de cada unidade de exploração.

d_{i_x} — distância de rolagem para o minério da unidade X_i.

Fig. 6

Esquema de um piso vulgar

e a capacidade de transporte, na unidade de tempo, de uma locomotiva é dada por:

$$p'_{i_x} = \frac{\varphi'\ \eta'}{\tau'_{i_x}} = \frac{\varphi'\ \eta'\ K\ v_1}{K\ v_1\ t_3 + (K+1)\ d_{i_x}}$$

Por diversas razões, entre elas de segurança, deve-se procurar que cada piso tenha em funcionamento na mesma unidade de tempo apenas uma locomotiva, a qual durante o relevo estará em constante vai-vém, podendo completar N_i ciclos ou composições no piso i:

$$N_i = N_{i_1} + N_{i_2} + \ldots + N_{i_x} + \ldots = \Sigma\ N_{i_x}$$

Cada composição deverá, quando em carga, transportar a capacidade máxima de transporte da locomotiva logo, para obtermos na arreação do piso o nosso objectivo e_i, terão de lá chegar N_i locomotivas:

$$e_i = N_i \; p'_i = \Sigma \; N_{i_x} \; p'_{i_x}$$

e porque $e_i = \Sigma \; e_{i_x}$ teremos:

$$N_i = \frac{e_i}{p'_i} = \Sigma \frac{e_{i_x}}{p'_{i_x}} = \Sigma \frac{e_{i_x} \; z'_{i_x}}{\varphi' \; \eta'} = \frac{1}{\varphi' \; \eta'} \; \Sigma \; e_{i_x} \; z'_{i_x} = \frac{1}{\varphi' \; \eta'} \; \Sigma \; e_{i_x} \; \frac{K \; v_1 \; t_3 + (K+1) d_{i_x}}{K \; v_1} =$$

$$= \Sigma \; e_{i_x} \; \frac{\left[K \; v_1 \; t_3 + (K+1) \; d_{i_x} \right]}{\varphi' \; \eta' \; K \; v_1} = \frac{e_i \; K \; v_1 \; t_3 + \Sigma \; e_{i_x} \; (K+1) \; d_{i_x}}{\varphi' \; \eta' \; K \; v_1} = \frac{e_i \; K \; v_1 \; t_3 + (K+1) \; \Sigma e_{i_x} \; d_{i_x}}{\varphi' \; \eta' \; K \; v_1}$$

Segundo o raciocínio que tem vindo a ser aplicado N_i terá de ser constante, o que implica a constância de

$$\Sigma \; e_{i_x} \; d_{i_x} = Z'$$

e, por analogia com o que se passou com a frota de carregamento, teremos:

$$m \; Z' = \Sigma \; R_{i_x} \; d_{i_x}$$

onde m continua a representar o número de actos de exploração.

Desenvolvendo:

$$Z' \; \Sigma \; R_{i_x} = e_i \; \Sigma \; R_{i_x} \; d_{i_x}$$

$$Z' = e_i \; \overline{D}_i = \Sigma \; e_{i_x} \; d_{i_x}$$

$$\overline{D}_i = \frac{\Sigma \; e_{i_x} \; d_{i_x}}{e_i}$$

e o número de locomotivas necessárias fica definido por:

$$\boxed{N_i = \frac{e_i \; K \; v_1 \; t_3 + (K+1) \; e_i \; \overline{D}_i}{\varphi' \; \eta' \; K \; v_1} = \frac{e_i \; [K \; v_1 \; t_3 + (K+1) \; \overline{D}_i]}{\varphi' \; \eta' \; K \; v_1}} \qquad \text{(B)}$$

admitindo-se como verdadeira já a possibilidade de desmonte da totalidade do piso por actos elementares de exploração e devendo apresentar-se o mesmo tipo de considerações apresentadas quando abordámos a frota de carregamento (η' efectivamente verificado na prática e, consequentemente, teremos $\overline{D}_i$ constante ao longo da vida do piso).

Para este caso da rolagem, resta determinar apenas o número de vagonas que cada composição comporta, o que é fácil pois tendo sempre vagonas iguais, de capacidade útil, em peso, q', teremos apenas que dividir φ' (capacidade da locomotiva) por q', Isto significa que cada composição transportará $\frac{\varphi'}{q'}$ vagonas, havendo que determinar, em função de N_i e do tempo de carga e descarga de cada vagona, o número de vagonas que existirá no piso, pois se admite que a locomotiva não espera, isto é, chega com uma composição carregada à arreação do poço e logo deverá partir com outra composição vazia e vice-versa junto ao local de carregamento das vagonas de forma a respeitar as condições introduzidas (t_3 ser constante, termos apenas uma locomotiva no piso, etc.).

É evidente que na busca da melhor solução para esta questão se encontra como número de composições mínimo possível $2+\theta$, sendo θ o número de unidades de exploração em actividade de carregamento simultaneamente. E este número é dito mínimo porque para tal é necessário que seja possível carregar uma composição durante um ciclo de rolagem menos $\frac{t_3}{2}$, admitindo a igualdade de tempo gasto no

carregamento de uma composição e da sua descarga na arreação, isto é, tanto a carga como a descarga terão de ter duração inferior a:

$$\frac{t_3}{2} + t_{1_{i_x}} + t_{2_{i_x}} = \frac{t_3}{2} + \frac{d_{i_x}}{v_1} + \frac{d_{i_x}}{K v_1} = d_{i_x} \frac{K+1}{v_1} + \frac{t_3}{2}$$

Este modelo é um dos vários possíveis, pois pode admitir-se, por exemplo, a assistência das locomotivas ao carregamento das composições, entre outros modelos.

Como nota final, no que diz respeito à frota de rolagem, não queremos deixar de referir o cálculo do número de vagonas que há que encher para a satisfação da totalidade de minério carregado pelas pás auto-carregadoras em dado período de tempo. Em cada ciclo da pá auto-carregadora é colocado, na tolda de descarga, minério suficiente para o enchimento de $\frac{\varphi'}{q'}$, vagonas, número de vagonas este que pode ou não ser suficiente para o preenchimento de uma composição de vagonas. Como cada composição tem $\frac{\varphi'}{q'}$, vagonas teremos que:

— se $\varphi = \varphi'$ em cada ciclo da pá auto-carregadora encher-se-á uma composição;

— se $\varphi > \varphi'$ em cada ciclo da pá auto-carregadora encher-se-á mais do que uma composição (exactamente $\frac{\varphi}{\varphi'}$ composições); e

— $\varphi < \varphi'$ em cada ciclo da pá auto-carregadora encher-se-á menos do que uma composição (exactamente $\frac{\varphi}{\varphi'}$ de uma composição).

A situação ideal seria a de $\varphi = \varphi'$, pois isso significaria que de cada vez que se completasse um ciclo da pá auto-carregadora teríamos de ter carregado integralmente uma composição de vagonas, para se respeitar o princípio de segurança de manutenção das toldas de descarga de minério sempre cheias. Mesmo matematicamente é esta a hipótese mais cómoda, pois a igualdade de φ e φ' arrastará a possibilidade de fácil relacionação entre n_i e N_i tal como estes valores se expressam em (A) e (B), tudo dependendo das velocidades v e v_1 e das distâncias médias $\overline{L}_i$ e $\overline{D}_i$.

A 2.ª hipótese ($\varphi > \varphi'$) não é usual, pois ela significa que as composições de vagonas são muito pequenas, o que é anti-económico, pois exigiria grande número de locomotivas (todas de pequena capacidade) e aumento da mão-de-obra respectiva.

A 3.ª hipótese ($\varphi < \varphi'$) é a mais usual e nela verifica-se que o número de ciclos da pá auto-carregadora para encher uma composição é dado por:

$$N_c = \frac{\varphi'}{\varphi}$$

enquanto que a produção horária de uma composição é:

$$P_{i_x} = \frac{60}{\tau'_{i_x}} \varphi' = \frac{60}{\tau'_{i_x}} - \varphi N_c$$

desde que τ'_{i_x} esteja expresso em minutos. Isto significa que o número de composições necessárias, numa hora, para a unidade X_i, é dada por:

$$N_r = \frac{e_{i_x}}{P_{i_x}} = \frac{e_{i_x} \tau'_{i_x}}{60 - \varphi N_c} = \frac{e_{i_x} \tau'_{i_x}}{60 - \varphi'}$$

desde que a unidade de tempo h, a que se refere a taxa de desmonte e_{i_x}, seja a hora. Posto isto, é fácil ter o número de vagonas a encher, pois já vimos que ele se relaciona com φ' da seguinte forma:

$$N_v = \frac{\varphi'}{q'}$$

então, numa hora, há que encher na unidade X_i $\frac{e_{i_x} \tau'_{i_x}}{60 . N_v q'}$ vagonas, a que correspondem $\frac{e_{i_x}}{P_{i_x}} = \frac{e_{i_x} \tau'_{i_x}}{60 - \varphi'}$ composições, sendo também estes os números de vagonas e de composições provenientes da unidade X_i que chegam durante uma hora à arreação do poço de extracção do piso i.

7. POÇO DE EXTRACÇÃO

Seguindo agora raciocínio análogo, teremos como ciclo no poço, para o piso i:

$$\tau_{p_i} = T + \frac{H_i}{v_s} + \frac{H_i}{v_d} = T + 2\,\frac{H_i}{V} = \frac{T\,V + 2\,H_i}{V}$$

desde que H_i seja a profundidade do piso i e que a velocidade de subida ($v_s = V$) seja igual à velocidade de descida ($v_d = V$), o que é normal, pois é normal a existência de poços com dois canais tendo skip ou uma jaula em cada canal a actuarem em simetria; mesmo que assim não aconteça e exista apenas um skip ou uma jaula temos uma velocidade média V válida para aplicação na fórmula.

Em 4 já tinhamos definido, para o poço de extracção os seguintes rendimentos:

$r_i = \Sigma \dfrac{E_i}{e_i}$ → (rendimento real, em relação ao piso i, durante o tempo h)

$r_{h_i} = \dfrac{r_i}{h}$ → (rendimento horário real da extracção, durante o tempo h, em relação ao piso i)

pelo que a sua capacidade de extracção do piso i na unidade de tempo é dada por:

$$p_{p_i} = \frac{\varphi_p\ r_{h_i}}{\tau_{p_i}} = \frac{\varphi_p\ r_{h_i}\ V}{T\,V + 2\,H_i}$$

Esta capacidade de extracção, numa hora, tem de equivaler à produção horária do piso, produção esta proveniente de θ unidades de exploração em actividade de carregamento simultaneamente. De cada uma daquelas unidades X_i chegará, numa hora, $\dfrac{e_{i_x}}{p_{i_x}}$ composições e a totalidade de composições chegadas à arreação do piso, numa hora, será

$$\sum_{i=1}^{\theta} \frac{e_{i_x}}{P_{i_x}}$$

Como cada composição tem a capacidade útil φ' teremos na arreação do piso, numa hora a seguinte produção:

$$p_{p_i} = \varphi' \sum_{i=1}^{\theta} \frac{e_{i_x}}{P_{i_x}}$$

Para a totalidade do jazigo, com n pisos em actividade servidos por este poço, teremos uma possibilidade de extracção de:

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_i$$

a qual é repartida pelos diversos pisos em função das características pretendidas para o total extraído, o que levou a fixar a distribuição horária da extracção por esses pisos.

Para cada piso já sabemos as possibilidades de extracção do poço numa hora ou em qualquer outra unidade de tempo.

Não nos parece relevante o prolongamento deste estudo para o poço de extracção, pois ele em qualquer mina bem dimensionada não é o «gargalo» da produção; normalmente esse «gargalo» ou é o equipamento de carregamento e/ou de rolagem ou é nas instalações a juzante do poço de extracção.

8. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

O método acima descrito não é ainda utilizado em qualquer das minas onde exercemos a nossa actividade profissional actualmente.

Os resultados práticos da sua aplicação só poderão vir a ser encontrados depois de aplicado o método e de os compararmos com a actual metodologia clássica que é seguida. No entanto, métodos

semelhantes para a lavra a céu aberto estão dando boas provas em todo o mundo há já quase uma dezena de anos, a partir do incremento da morfologia matemática no campo mineiro (ver OBJECTIVO-INTRODUÇÃO deste trabalho).

Na falta de experimentação real na aplicaçao do método agora descrito, limitamo-nos a apresentar o desenvolvimento do cálculo para um piso da Mina do Moinho (Aljustrel), a título de exemplo.

PISO 200 (i = 200)

O piso está dividido em 9 unidades de exploração que realmente se podem esquematizar do modo constante da figura 7. A 5.ª unidade de exploração é uma unidade de franja composta por 3 câmaras.

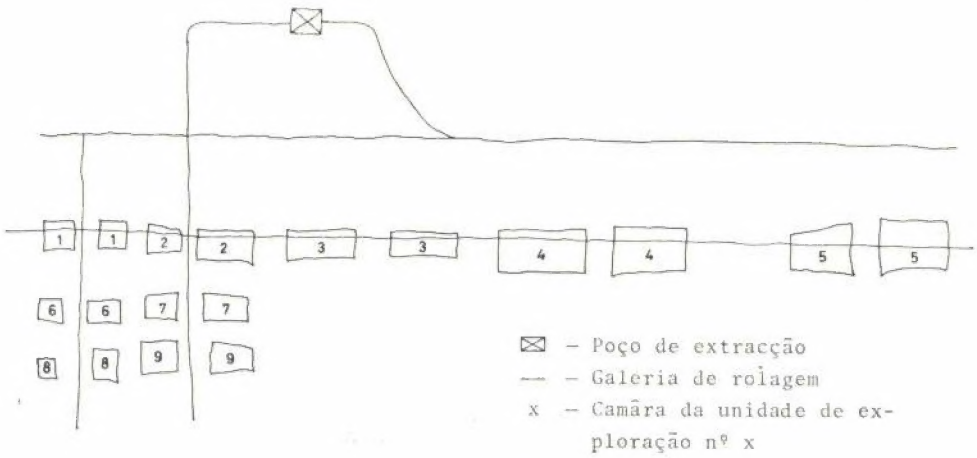


Fig. 7

Esquema simplificado do piso 200 da Mina do Moinho

As características consideradas para cada unidade de exploração são as constantes do seguinte quadro:

Unidade de Exploração	Reserva a Explorar R_{i_x} (ton))	Distância média de rolagem (m) d_{i_x}	Distância média de carregamento (m) l_{i_x}	Teor de enxofre (% S)	Teor de cobre (% Cu)
1	32 700	295	25 + 25 = 50	46,51	0,62
2	24 200	236	25 + 25 = 50	45,83	0,62
3	38 500	258	20 + 20 = 40	47,53	1,78
4	24 800	342,5	25 + 25 = 50	47,07	1,89
5	150 600	462,5	20 + 20 = 40	46,87	0,41
6	58 600	315	33 + 33 = 66	45,74	0,83
7	43 300	263	27 + 27 = 54	46,25	0,98
8	71 300	345	26 + 26 = 52	47,51	1,34
9	52 700	282	30 + 30 = 60	46,12	1,25
Médias Ponderadas...		$\bar{D}_i = 347,8$	$\bar{L}_i = 49,8$	46,68	0,93

Reserva total a Explorar: $R_{200} = \Sigma\ R_{i_x} = 496\ 700$ ton

Deste quadro não consta o rendimento em peso, parâmetro fundamental normalmente para outro tipo de jazigo, porque se verifica que neste caso ele é igual para todas as unidades de exploração, o que se justifica facilmente por o minério ocorrer em «massa».

Segundo o método exposto, as condições de exaustão do piso e de manutenção da frota constante implicam que o centro de massas do piso se mantenha constante. Então as possibilidades de combinação no piso resumem-se a combinar a unidade n.º 5 (única unidade de exploração com distância média de rolagem superior à distância média ponderada de rolagem superior à distância média ponderada de rolagem de todo o piso) com todas as outras unidades de exploração. Estas combinações terão de se sujeitar, portanto,

à relação de 1 para 2,3 em tonelagem a extrair, visto que a unidade n.º 5 tem 150 600 toneladas exploráveis e o restante piso tem 346 100 toneladas exploráveis no seu conjunto.

Segundo a simbologia usada, os valores reais que temos de considerar neste exemplo são:

$e_{200} = 105\,300$ ton/ano $= 0{,}545$ ton/min.
$V_1 = 8$ km/h $= 133$ m/min.
$V_2 = K\ V_1 = 10$ km/h
$K = \dfrac{V_2}{V_1} = 1{,}25$
$t_3 = 4$ min.
$Q' = 17$ ton
$\eta' = 0{,}75$
$V = 0{,}5$ m/seg $= 30$ m/min.
$Q = 5$ ton
$t_o = 6$ min
$\eta = 0{,}50$
$q' = 1{,}9$ ton
$V = 3{,}4$ m/seg $= 204$ m/min.
$T = 45$ seg $= 0{,}75$ min.
$H_{200} = 223$ m
$Q_p = 2\ q' = 3{,}8$ ton
$r_{h_{200}} = 0{,}80$

Considerou-se que um ano tinha 230 dias de trabalho e que cada dia de trabalho tinha apenas 14 horas úteis efectivamente (o que é a realidade em dois turnos produtivos por dia).

Com estes valores e por aplicação directa da fórmula (B) temos:

$$N_{200} = 0{,}372 \text{ locomotivas}$$

logo, uma locomotiva é suficiente para o trabalho de rolagem do piso.

Os ciclos para cada unidade de exploração são:

$$\tau'_1 = 7{,}99 \text{ min}$$

$\tau'_2 = 7{,}19$ min
$\tau'_3 = 7{,}49$ min
$\tau'_4 = 8{,}63$ min
$\tau'_5 = 10{,}26$ min
$\tau'_6 = 8{,}26$ min
$\tau'_7 = 7{,}56$ min
$\tau'_8 = 8{,}67$ min
$\tau'_9 = 7{,}82$ min

A possibilidade de produção horária de uma composição para a unidade de exploração n.º 5 será de:

$$P_5 = 99{,}4 \text{ ton/h}$$

mas como a taxa de desmonte daquela unidade é

$$e_5 = 9{,}9 \text{ ton/h}$$

o número de composições por hora a trabalhar para a unidade n.º 5 é:

$$N_{r_5} = 0{,}10 \text{ composições/hora}$$

Para as restantes unidades temos, com

$$e_r = 22{,}8 \text{ ton/h}$$

os seguintes valores:

$N_{r_1} = 0{,}18$ composições/hora
$N_{r_2} = 0{,}16$ composições/hora
$N_{r_3} = 0{,}16$ composições/hora
$N_{r_4} = 0{,}16$ composições/hora
$N_{r_6} = 0{,}18$ composições/hora
$N_{r_7} = 0{,}17$ composições/hora
$N_{r_8} = 0{,}19$ composições/hora
$N_{r_9} = 0{,}17$ composições/hora

Note-se que a quase constância encontrada para todos estes valores de N_r (exceptuando, logicamente, o de N_{r_5}) vem provar a excelência do método.

O número de vagons a encher também é facilmente calculado. Por exemplo, para a unidade n.º 5 encher-se-ão:

0,89 vagons/hora

por aplicação directa da fórmula deduzida para o efeito.

Cada composição será de 9 vagonas na unidade de exploração n.º 5.

Temos, assim, totalmente resolvidos os problemas levantados pela 1.ª equação do nosso sistema de equações que representa o conjunto de relações estruturantes que definem as associações permitidas entre as unidades de exploração do piso considerado. No nosso caso, e dados os parâmetros constantes do quadro com as características de cada unidade de exploração do piso (os parâmetros são: distância de rolagem, distância de carregamento, teor de enxofre e teor de cobre), teremos um sistema de 4 equações a 4 incógnitas para resolver ($\beta = 4$). Deste sistema já temos as combinações possíveis à luz da solução de uma das equações apenas, a equação referente ao parâmetro distância de rolagem (que foi a considerada «mais forte»), equação bem resolvida como se constata pelos valores de N_r achados. Há agora que continuar a resolução do sistema de equações, tal como se expôs na parte final de 5. ESTRUTURAÇÃO DO MODELO.

Como combinações possíveis para satisfação da 1.ª equação, recorde-se, tinhamos achado:

1.ª Unidade	2.ª Unidade
5	1
5	2
5	3
5	4
5	6
5	7
5	8
5	9

e agora tomemos para 2.ª equação a referente aos teores de cobre (considerada mais fraca que a 1.ª, mas mais forte que as restantes duas). O teor de cobre médio da unidade n.º 5 é inferior ao teor de cobre médio ponderado do piso, logo são de excluir as combinações 5-1, 5-2 e 5-6 e de considerar as combinações 5-3, 5-4, 5-7, 5-8 e 5-9, para as quais se obterão os seguintes valores médios ponderados de cobre:

5-3 — 1,36 % Cu (desvio de 46 %)
5-4 — 1,44 % Cu (desvio de 55 %)
5-7 — 0,81 % Cu (desvio de 13 %)
5-8 — 1,06 % Cu (desvio de 14 %)
5-9 — 0,99 % Cu (desvio de 6 %)

sendo as ponderações feitas em função das taxas de desmonte de cada unidade de exploração (calculadas na resolução da 1.ª equação do sistema) e os desvios referem-se à média ponderada do teor de cobre médio do piso. Todos estes desvios são no sentido positivo (percentagens de cobre superiores à média ponderada do piso), exceptuando o referente à combinação 5-7. As combinações excluídas são todas excluídas por combinarem duas unidades de teores médios de cobre inferiores ao teor médio ponderado de cobre do piso, pelo que todas essas combinações também terão teor médio ponderado inferior ao teor médio do piso. Assim, é lógico que não se deva considerar todas as combinações achadas possíveis até agora e se deva fixar um γ para desvio máximo admissível positivo (teor médio ponderado da combinação superior ao teor médio ponderado do piso). Se este γ for 15 % teremos de excluir as combinações 5-3 e 5-4 e considerar apenas as combinações 5-7, 5-8 e 5-9.

Posto isto, passa-se para a resolução da 3.ª equação do nosso sistema. É a equação referente ao teor de enxofre e o seu tratamento é em tudo semelhante ao da equação anterior. Só teremos como possíveis as combinações 5-7 e 5-9, para as quais se obterão os seguintes valores médios ponderados de enxofre:

5-1 — 46,43 % S (desvio de 1 %)
5-9 — 46-35 % S (desvio de 1 %)

Com tão pequenos desvios em relação à média ponderada do teor de enxofre médio do piso, aceitam-se as duas combinações. E numa 2.ª análise pode-se também aceitar a combinação 5-8 excluída, por tê-lo sido por ambas as suas unidades de exploração terem teores médios de enxofre superiores ao teor de enxofre médio ponderado do piso.

Passar-se-ia agora para a 4.ª e última equação do nosso sistema e que é referente ao parâmetro distância de carregamento. O seu tratamento é idêntico, pelo que nos dispensamos de o descrever, excepto no que diz respeito ao cálculo das necessidades de equipamento de carregamento.

Para obtenção de tudo o que se considerou na exposição do método descrito, basta aplicar a fórmula (A) directamente e teremos:

$$n_{200} = 1{,}670 \text{ pás}$$

logo são suficientes 2 pás auto-carregadoras no piso, distribuindo-se uma para cada unidade de exploração em actividade. A produção horária deste equipamento de carregamento é igual à produção horária já calculada para a frota de rolagem.

Chegámos, assim, ao fim da resolução do sistema de equações, apenas com duas combinações a satisfazê-lo totalmente, nas condições que se expõem no quadro:

Combinatória	Taxa de desmonte (ton/h)	Reserva inicial (ton)	Tempo de esgotamento de uma das unidades (dias)	Reserva sobrante (ton)	RESERVA DESMONTADA		
					Ton	% Cu	% S
5	9,9	150 600	—	131 799	62 101	0,81	46,43
7	22,8	43 300	136	—			
5	9,9	131 799	—	108 916	75 583	0,99	46,35
9	22,8	52 700	165	—			

Este quadro pode e deve entender-se como o principio de uma das sequências possíveis de exploração. Mas ele afasta muitas unidades de exploração de forma talvez demasiado rígida, como o é o facto de não se ter admitido desvio algum possível para o parâmetro distância de rolagem, que era o parâmetro da equação mais forte do sistema (a 1.ª equação a ser resolvida). Para se ter uma noção da influência desta fixação de desvio nulo, basta reparar que se admitirmos que $\overline{D}_i$ se pode deslocar 5 % para qualquer lado teremos um $\gamma = 17{,}4$ metros ou seja D_i poderá estar compreendido entre.

$$\overline{D}_i + \gamma = 347{,}8 + 17{,}4 = 365{,}2 \text{ m}$$

e

$$\overline{D}_i - \gamma = 347{,}8 - 17{,}4 = 330{,}4 \text{ m}$$

e ao fazermos isto vamos colocar dentro deste intervalo as unidades de exploração n.os 4 e 8, as quais passarão a poder combinar-se com as outras unidades de exploração, para além de se poderem combinar entre si e de poderem continuar a combinar-se com a unidade n.º 5. Assim teríamos como possíveis mais estas combinações:

4-1, 4-2, 4-3, 4-6, 4-7, 4-9, 4-8, 8-1, 8-2, 8-3, 8-6, 8-7 e 8-9

para além das já consideradas:

5-1, 5-2, 5-3, 5-4, 5-6, 5-7, 5-8 e 5-9

o que perfaz um total de 21 combinações, contra o anterior total de 8 combinações, só por se ter admitido o desvio de 5 % num parâmetro que estava totalmente fixo.

Ter-se-ia agora de resolver as restantes 3 equações do sistema considerando estas 21 soluções da 1.ª equação e, no final, completar o quadro da sequência possível de exploração.

Para se estender o exemplo até à totalidade do campo estudado neste trabalho resta averiguar o que se passa no poço de extracção. Por aplicação directa das respectivas fórmulas temos:

$$a_{P200} = 2{,}94 \text{ min.}$$

$$p_{P200} = 1{,}03 \text{ ton/min.} = 61{,}8 \text{ ton/hora}$$

e o poço tem apenas necessidade de trabalhar meio-dia para este piso em cada dia de trabalho (a taxa de desmonte era de 32,7 ton/hora). Não nos esqueçamos que esteamos dentro do caso habitual ($Q' > Q$), que chegarão à boca do poço 2 composições por hora ($\theta = 2$), pelo que teremos no poço 18 vagonas por hora e a existência total de vagonas no piso terá de ser:

$$18 \times (2 + \theta) = 72 \text{ vagonas}$$

9. NOTAS FINAIS

O exemplo apresentado não permite avaliar a total generalidade do método exposto, dado o pequeno número de unidades no piso estudado. Mas teve de ser assim por não dispormos, no local de trabalho, de capacidade de cálculo computorizado que permitisse a introdução de mais unidades de exploração e de outros pisos. Desejamos notar de novo que qualquer ordenador está apto a proceder a toda esta sequência de cálculo, depois de devidamente programado, dando em «out-put» uma sequência de exploração possível, a frequentar, depois, arbitrariamente, e os dados adicionais desejados.

O piso dado como exemplo permite desde já afirmar que a sua actual situação é de desiquilíbrio, pois se ele fosse explorado segundo o método exposto não estaria hoje na situação em que ele se encontra e que pode ser caracterizada, por exemplo, pelo facto da sua unidade de exploração n.º 5 ter duas das suas câmaras em 8.º — «corte ou planta» e a outra câmara em «6.º corte» (recorde-se a importância fundamental desta unidade de exploração no piso). Este desiquilíbrio ainda pode ser corrigido, se se proceder tal como se fez ao longo deste trabalho, pois os dados considerados são os reais nesta altura.

Os autores agradecem à Administração de Pirites Alentejanas S. A. R. L. a autorização concedida para a apresentação do exemplo. Igualmente agradecem idêntica autorização da Administração de Mines et Industries S. A. embora esse exemplo não esteja tratado aqui.

EM TEMPO:

I. O presente trabalho, ao ser apresentado no Seminário de Geomatemática, foi precedido de algumas palavras introdutórias que focaram essencialmente o objectivo da «parametrização», por blocos tecno lógicos, em termos de projecto, e as vantagens de critérios de rejeição se basearem nos parâmetros «teor de concentrado» e «rendimento em peso». Igualmente foi feita referência à vantagem da estacionarização preferencial daqueles dois parâmetros, cuja variância é menor do que a referente aos parâmetros do tal-qual, tal como foi devidamente demonstrado pelo Sr. Prof. Eng.º Quintino Rogado no seu trabalho apresentado ao 13th APCOM.

Na sequência destas observações foram tecidas considerações sobre as vantagens da estacionarização de parâmetros e das consequências de fixação de um «teor de corte», nomeadamente para:

— saber como evolui o teor médio global ao longo da vida da Mina;

— saber se há necessidade de alterar frequentemente o teor de corte ao longo da vida da Mina;

— garantir o teor do concentrado vendável;

— definir as condições de «blendagem» na Mina;

— garantir nas reservas sobrantes, em cada instante, as características iniciais do jazigo;

— actuar na definição das características contratuais de venda dos concentrados e assumir os respectivos riscos de penalidades conscientemente;

etc., etc.

II. No final, após a exposição do trabalho, foi apresentado um outro exemplo, referente ao *piso 265* da Mina do Moinho (Aljustrel), para completar o exemplo constante do «pré-print» distribuído aos participantes no Seminário em causa uma vez que este piso tem substanciais diferenças em relação ao outro e, também, porque se entendeu conveniente fazer um estudo de interligação dos dois pisos, devido a problemas actuais que se sentem naquela Mina referentes à utilização do poço de extracção.

Dado o pormenor a que se desceu no «pré-print» na apresentação do exemplo, limitamo-nos agora à apresentação dos dados iniciais e das conclusões referentes a este novo exemplo. Assim:

— *Esquema do piso:*

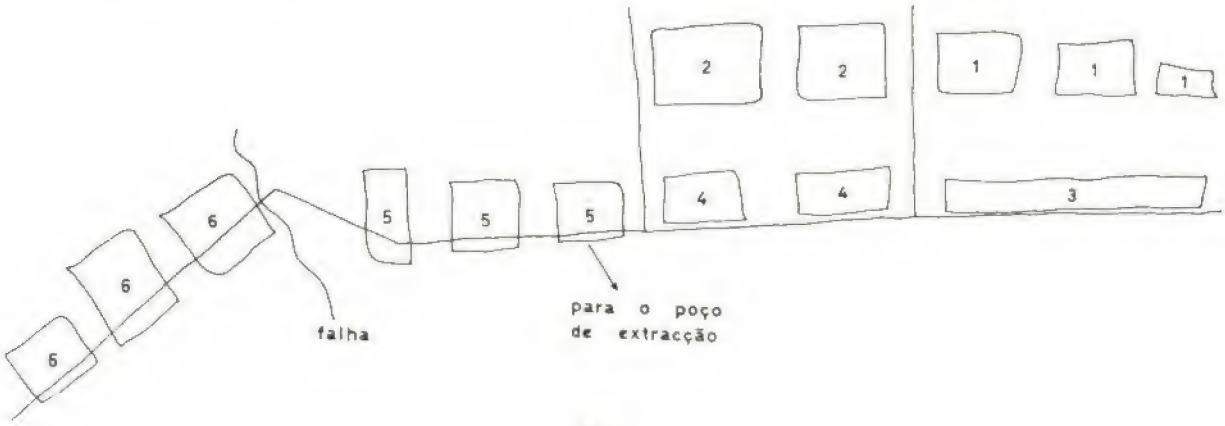


Fig. 8

Esquema simplificado do piso 265 da Mina do Moinho (simbologia idnêtica ao do esquema da fig. 7)

Note-se:

a) a influência da falha no traçado das galerias de rolagem e na existência de 3 câmaras nas unidades de exploração n.os 5 e 6; e

b) a existência de 3 unidades de franja (duas com 3 câmaras cada e uma de uma só câmara).

— *Características de cada unidade de exploração:*

Unidade de exploração	Reserva a explorar R_{ix} (ton)	Distância média de rolagem d_{ix} (m)	Distância média de carregamento l_{ix} (m)	Teor de enxofre % S	Teor de cobre % Cu
1	323 700	280	19+19=38	46,86	0,81
2	310 300	235	26+26=52	45,95	0,70
3	130 400	265	25+25=50	46,09	1,37
4	225 700	193	15+15=30	46,31	1,58
5	467 200	225	20+20=40	48,08	1,21
6	359 600	367	22+22=44	47,96	1,05
Médias ponderadas...		$\overline{D}_i$ = 263,5	$\overline{L}_i$ =42,0	47,11	1,01

Reserva total a explorar: $R_{265} = \Sigma\ R_{ix}$ = 1 816 900 ton.

— *Repartição da reserva em função de* $\overline{D}_i$:

R(+) ... 813 700 ton ... 44,8 %
R(−) ... 1 003 200 ton ... 55,2 %

— *Valores a usar são todos os do piso 200, excepto:*

e_{265} = 134 000 ton/ano = 0,694 ton/min
e_{265} (+) = 0,311 ton/min = 18,66 ton/h
e_{265} (−) = 0,383 ton/min = 22,98 ton/h

total → 0,694 ton/min = 41,64 ton/h
H_{265} = 288 m

— *Resultados obtidos:*

N_{265} = 0,412 locomotivas no piso

z'_1 = 7,79 minutos
z'_2 = 7,18 minutos
z'_3 = 7,59 minutos
z'_4 = 6,61 minutos
z'_5 = 7,05 minutos
z'_6 = 8,97 minutos
P_1 = 130,9 ton/h
P_2 = 142,1 ton/h
P_3 = 134,4 ton/h
P_4 = 154,3 ton/h
P_5 = 144,7 ton/h
P_6 = 113,7 ton/h

N_{r_1} = 0,14 composições/hora
N_{r_2} = 0,16 composições/hora
N_{r_3} = 0,14 composições/hora
N_{r_4} = 0,15 composições/hora
N_{r_5} = 0,16 composições/hora
N_{r_6} = 0,16 composições/hora

note-se esta quase constância obtida (é um bom resultado)

1,35 vagonas/hora em cada unidade de exploração
19 vagonas/dia em cada unidade de exploração
2 composições/dia em cada unidade de exploração (um comboio de 10 vagonas e outro de 9 vagonas)

$n_{265} = 2{,}05 \approx 2$ pás no piso

$z_{p_{265}}$ = 3,57 minutos

$p_{p_{265}}$ = 0,85 ton/minuto = 51 ton/h

e_p = 41,64 ton/h, o que equivale a cerca de 80 % de um dia de trabalho do poço de extracção

$Q' > Q$, $\theta = 2$ $\Big\}$ $19 \times (2 + \theta) = 76$ vagonas no piso

— *Início de uma possível sequência de exploração*

Combinatória	Taxa de desmonte (ton/h)	Reserva inicial (ton)	Tempo de esgotamento de uma das unidades (dias)	Reserva sobrante (ton)	Reserva desmontada		
					Tonelagem	% S	% Cu
1	18,66	323 700	1239	—	722 340	47,53	1,03
5	22,98	467 200	—	68 560			
6	18,66	359 600	—	107 633	562 267	46,85	0,86
2	22,98	310 300	965	—			

Note-se que se admitiram os mesmos desvios considerados para o piso 200, ou seja $\overline{D}_1$ rígido, 15 % para o cobre e 1 % para o enxofre.

— *Observações pertinentes:*

Não repugna o sobrecarregar uma composição de vagonas com uma vagona mais do que o habitual (10 em vez de 9 vagonas), mas há que notar bem que n_{265} veio a dar 2,05 pás como necessárias para o piso

em estudo. Perante este número põe-se a questão: teremos de usar 2 ou 3 pás no piso? A resposta lógica seria 2 pás, para o que bastaria melhorar um pouco o rendimento de cada uma delas, mas a prática mostra que, com tal número, se opta sempre por colocar no piso uma 3.ª pá auto-carregzadora, a qual ficará em regime de sub-utilização acentuada, embora permita uma melhor manutenção das 3 unidades em trabalho no piso.

— *Relacionamento entre os pisos 200 e 265:*

Piso 200	*Piso 265*
$e_{p_{200}} = 32{,}7$ ton/h	$e_{p_{265}} = 41{,}64$ ton/h
$p_{p_{200}} = 61{,}8$ ton/h	$p_{p_{265}} = 51{,}0$ ton/h
tempo de trabalho do poço $\approx 50\,\%$ do dia	idem $\approx 80\,\%$ do dia

O dia de trabalho sempre considerado foi de 2 turnos, com um total de 14 horas diárias produtivas, mas o já apontado leva a uma utiliação de 50 + 80 = 130 % daquelas horas num total máximo possível de 100 %, o que é manifestamente impossível. Uma solução é usar 50 % para o piso 200 (a totalidade necessária para o piso) e outros 50 % para o piso 265, ficando 30 % de 14 horas para ser extraído do piso 265 em 3.º turno de trabalho do poço, o que corresponde a 4,2 horas de trabalho (teríamos sem trabalho apenas 7 − 4,2 = 2,8 horas úteis para possível manutenção). Esta solução, indesejável, tem ainda o inconveniente de exigir um volante de vagonas no piso, subindo substancialmente o número de vagonas necessárias no piso. Para que o poço trabalhe apenas 2 turnos por dia põem-se três alternativas:

— melhorar o rendimento r_h (qualquer melhoria possível deve ser insuficiente para o desejado);

— ampliar a capacidade de extracção do poço (o que exige um investimento adicional); ou

— fazer transbordo intermédio algures, para outro poço de extracção, de dada percentagem do minério a extrair do piso 265.

Verifica-se, assim, que nesta Mina, contrariamente ao suposto por nós em 7, o poço de extracção é «gargalo» da produção para os níveis inferiores do piso 200. Neste caso concreto foi escolhida a 3.ª alternativa das anteriormente apontadas, cuja extracção se esquematiza, no que se refere ao excesso de capacidade do poço que se tem apontado, do seguinte modo:

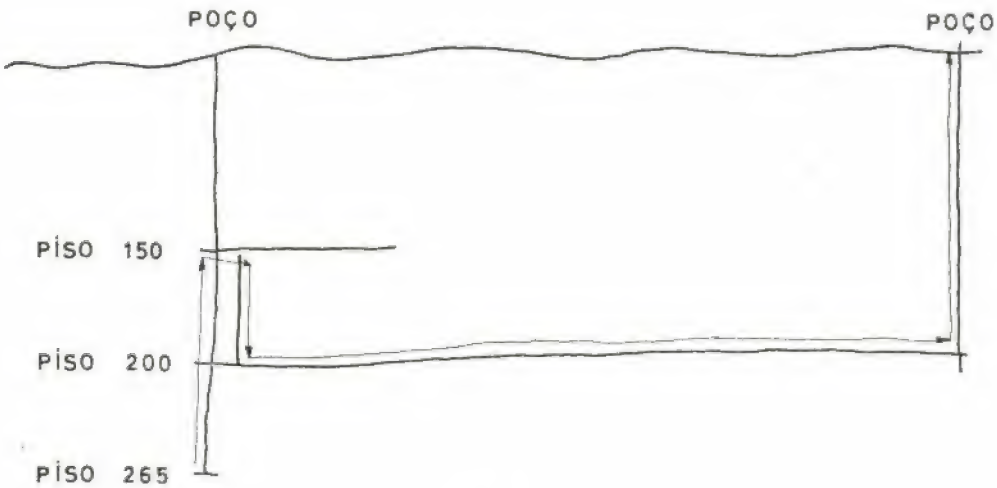


Fig. 9

Esquema em vigor na Mina do Moinho (elevação do piso 265 até ao piso 150, aonde se usa uma chaminé-silo colectora para fazer chegar o minério a uma galeria de rolagem, do piso 200, com ligação a um outro poço de extracção que já era pré-existente, pelo que apenas se investiu na chaminé-silo colectora)

(Continuação da pág.ª 260)

nuclear húngara, projectada em 1966, localiza-se em Paks e será equipada com quatro reactores com uma potência total de 1760 MW (tipo de reactores PVR), devendo o primeiro entrar em funcionamento em Dezembro de 1980 e os restantes três em 1985. O equipamento para esta central, cujo custo total está calculado em 26 mil milhões de forints, será fornecido pela URSS e pela Checoslováquia, trabalhando no empreendimento técnicos soviéticos e polacos.

Polónia — Em 1974 a Polónia e a URSS assinaram um acordo com vista à construção da primeira central nuclear na Polónia, seguido, em 1976, pela conclusão de um acordo de cooperação relativo à produção de instalações para centrais nucleares. A central será localizada em Zarnowiec, no litoral de Gdansk.

O início dos trabalhos deverá ocorrer em 1979 e a entrada em funcionamento da central em 1984. Na primeira fase, a Zarnowiec será dotada com dois reactores VVER-440 MW, aos quais se acrescentará, mais tarde, um terceiro, com a potência de 1000 MW. Em 1988 a potência da central atómica polaca elevar-se-á a 1880 MW, e a capacidade nuclear do país será se 4880 MW em 1990 e de 23 000 MW no ano 2000.

República Democrática Alemã — A RDA possui duas centrais nucleares em funcionamento, a de Rheinsberg, ligada à rede desde 1966, e a de «Bruno Leuschner Nord I» em Lubmin (na baía de Greifswald) desde 1973. Esta última atingiu em Maio deste ano uma potência instalada total de 1320 MW com a entrada em serviço, com o auxílio soviético, do terceiro reactor de 440 MW. Presentemente, a RDA procede à ampliação da central de «Bruno Leuschner Nord II», com vista a atingir uma capacidade instalada de 3520 MW.

Checoslováquia — Desde 1970, data da assinatura do acordo intergovernamental entre a Checoslováquia e a URSS sobre construção de centrais nucleares, a Checoslováquia vem a realizar, com a colaboração da União Soviética, o seu programa de construção de centrais atómicas.

Em Jaslovske Bohunice, na Eslováquia, encontra-se já em funcionamento desde 1973 uma central experimental AI (urânio natural, água pesada, gás) de 143 MW, estando a ser construída, no mesmo local, uma segunda central VI dotada de dois reactores VVER-440, com uma capacidade individual de 440 MW. A entrada em funcionamento dos dois reactores está prevista, após vários atrasos, para 1978 e 1979, respectivamente. Em 1976, foi dado início aos trabalhos de edificação de uma terceira central V2 com características semelhantes às da VI, em Dukovany (Morávia do Sul). O primeiro reactor começará a funcionar em 1982, ou seja, com dois anos de atraso, e o segundo em 1984. A sua construção terá a assistência técnica soviética.

Em 1985, a parcela representada pela energia nuclear na produção energética total atingirá 17 %, em 1990 cerca de 40 % e no ano 2000 cerca de 70 %. A concretizarem-se as previsões, a Checoslováquia deverá possuir uma capacidade nuclear instalada de 800 MW em 1980, de 3500 MW em 1984, 10 500 MW em 1990 e de 30-35 000 MW no ano 2000.

A primeira central (experimental) da Checoslováquia foi realizada pela URSS. Relativamente à segunda, em construção, a participação soviética limitou-se ao fornecimento de determinados elementos do circuito primário. De futuro a indústria checa deverá construir na íntegra as centrais a instalar no seu território e fornecer igualmente determinados equipamentos à URSS e demais países socialistas. O país especializar-se-á, nomeadamente, na produção de reactores do tipo VVER a água pressurizada, prevendo que a sua produção anual, parcialmente destinada à exportação para os países do Comecon, atinja as cinco unidades antes de 1980. Este tipo de reactores será produzido até 1990; por volta de 1985, a sua capacidade será elevada para 1000 MW. A produção do primeiro reactor a neutrões rápidos e arrefecimento por meio de sódio foi já iniciada.

Por outro lado, encara-se a possibilidade de estabelecimento de novo acordo entre a Checoslováquia e a URSS, mediante o qual este país forneceria ao primeiro, electricidade contra a entrega do equipamento checo para a sua central de Khmel'nickij, bem como de diversos bens de consumo.

Cuba — Em 1977, Cuba iniciou, com o auxílio da União Soviética, a construção da primeira central nuclear, que deverá estar concluída em 1980, na região de Cienfuegos, 300 km ao sul de Havana. A URSS fornece os equipamentos necessários à Central, cujo primeiro bloco terá uma capacidade de 400 MW, estando a capacidade total do complexo calculada em 1700 MW.

[Extraído do «Boletim Mensal BFN», (12) Dezembro 1978].

NÚMERO 451/452 JANEIRO/FEVEREIRO/MARÇO 1979 ANO LIV VOLUME XL

C. D. U. 622. 73/765

Process Analysis and Simulation in Extractive Metallurgy by Stochastic and Deterministic Methods

ALEX OBLAD

Neste artigo apresentam-se métodos correntemente usados na construção e análise de modelos empíricos pela via estocástica clássica e também recorrendo a modelos determinísticos recentemente criados. Nesta última óptica e usando o modelo de balanço generalizado em sistemas de partículas, tratam-se aplicações à moagem discontínua/contínua, à flutuação e à lixiviação.

ABSTRACT

This paper deals with current methods used in construction and analysis of empirical models by the classical stochastic approach and with recent developments in deterministic models. These latter include the applications of a generalized population balance model for particulate systems to the operations of batch/ /continuous grinding, flotation, and concentrate leaching.

INTRODUCTION

The optimization of mining methods often is influenced by the processes that will be used to treat the ore. The behavior of these processes with respect to operating conditions and material feed characteristics is of prime interest, and considerable effort has been expended to define this behavior, not necessarily for applications to mining methods, but in general to gain a detailed knowledge of how to control the process products as a function of the presumably varying mineralogical characteristics of the feed.

In accomplishing this, simulation of unit operations and more recently entire plants has received the most direct attention. Process simulation has been approached from two contrasting methodologies. The purpose of both, however is to develop mathematical models for a given process.

The first approach, empirical modeling, samples the process response at various points in the space of the variables considered to control the response, and fits a surface of predetermined form to the sampled data. This approach has little or no theoretical basis, and the parameters, i.e. constants, are not physically meaningful. The model is entirely dependent on experimental measurement, and is therefore composed partly of real process variation and partly of error. Extreme rigor must be employed to assure that the result is a model essentially of the true process response and not that of the error.

Deterministic models are considered to comprise two types: phenomenological and theoretical. In the first, the equations for the process response have a theoretical basis but include parameters whose values can not be determined without experimental data. These parameters in general have physical significance. The theoretical model completely specifies the process response with parameters which can be calculated from theoretical considerations. Phenomenological models have achieved some success in industrial applications. Unfortunately, theoretical models usually require too detailed information to be of practical use, at least in extractive metallurgy.

The use of both stochastic and deterministic methods is now receiving almost universal application in the minerals industry. This paper will discuss some of the more significant developments in certain areas of mineral processing and hydrometallurgy.

STOCHASTIC METHODS

In the context of process analysis, stochastic modeling involves the application of classical statistical inference to estimate model parameters, to determine intervals in which the true values of such parameters lie, to determine the probable error of both data and predictions; and to provide a basis for testing of hypotheses about the model parameters and responses.

In general, these models are empirical. This precludes the evaluation of parameters in terms of physical reality; that is, the model parameters have no physical meaning. The experimental data are fit to a response surface in the space of the independent variables, the model having little or no theoretical basis. It is therefore extremely important to know the relationships between the error associated with the expe rimental measurement of the phenomenon being studied. This, of course, is true for all types of models, but especially for empirical models.

EMPIRICAL MODELS

These models are classified into two main types: linear and non-linear. Linear models are those which are linear in the parameters, or are transformable to linear. For exemple the equation:

$$Y = 1 - \exp(-KX^N)$$

is transformable linear:

$$Z = a + b\,W$$

where $Z = \ln(-\ln(1-y))$
$W = \ln X$
$a = \ln K$
$b = N$

To estimate the parameters of any model the leastsquares criterion is usually invoked. If we postulate that $J = f(X_1, X_2 \ldots X_n;\ \beta_0, \beta_1 \ldots \beta_n)$ in which the X_i are the independent variables and the β_i are parameters, then the measurement of the deviation between the predicted and experimental response, called the objective function, will be defined in the context of the least-squares criterion as follows:

$$\phi = \sum_{j=1}^{s} w_j \left(y_j - f_j(X_1, X_2 \ldots X_n; \beta_0, \beta_1 \beta_n) \right) \qquad 1$$

where $\phi \equiv$ objective function
$y_j \equiv$ experimental response for experimental level j
$f_j \equiv$ predicted response for experimental level j
$w_j \equiv$ weighting factor for experimental level j

The objective function ϕ will be minimized by choosing the appropriate values of the parameters $\beta_0, \beta_1 \ldots \beta_n$. If f is linear in the parameters, then an analytical solution is possible. Otherwise, successive approximations must be used based on some type of implicit linearization. Only linear functions will be di scussed here. It will also be assumed that the independent variables are non-stochastic, i.e. that they can be specified with negligible error.

Let the true response of a linear system be represented by:

$$\eta = \beta_0 + \beta_1 (X_1 - \overline{X}_1) + \beta_2 (X_2 - \overline{X}_2) + \ldots + \beta_n (X_n - \overline{X}_n) \qquad 2$$

Each experiment will correspond to a different level of the independent variables except when there are replicate experiments made at a constant experimental level to estimate experimental error.

It is possible to define a design matrix $\underline{\underline{X}}$ whose elements $x_{ij} - \overline{x}_i$ correspond to the value of variable i at level j. The vector of experimental responses $\underline{Y}$ has elements $\overline{y}_j$ which is the average response at level j; and let $\underline{\beta}$ be the vector of elements β_i. In this formulation

$$\overline{X}_i = \sum_{j=1}^{s} (p_j\, x_{ij}) \Big/ \sum_{j=1}^{s} p_j \qquad 3$$

where p_j = number of replicates at level j.

Therefore, $$\phi = \sum_{j=1}^{N} w_j \left(\bar{y}_j - \eta_j \right)^2 \qquad 4$$

or in matrix notation:

$$\left[\underline{Y} - \underline{\eta} \right]^T \underline{\underline{W}} \left[\underline{Y} - \underline{\eta} \right] \qquad 5$$

where

$$w_{ij} \begin{cases} p_j & i = j \\ o & i \neq j \end{cases} \quad ; \quad \underline{\eta} = \underline{\underline{X}}\, \underline{\beta}$$

To find the vector $\underline{\beta}$ giving the minimum value of ϕ, it is necessary to solve the equation: $\partial \phi / \partial \beta = o$.

$$\frac{\partial \phi}{\partial \underline{\beta}} = -2\, \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{W}} \left(\underline{Y} - \underline{\underline{X}}\, \underline{\beta} \right) = O \qquad 6$$

$$\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{W}}\, \underline{Y} = \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{W}}\, \underline{\beta} \qquad 7$$

If $\left[\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{W}}\, \underline{\underline{X}} \right]^{-1}$ exists, then the best estimate of β is

$$\hat{\underline{\beta}} = \left[\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{W}}\, \underline{\underline{X}} \right]^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{W}}\, \underline{Y} \qquad 8$$

Therefore, the best estimate of η is:

$$\hat{\underline{Y}} = \underline{\underline{X}}\, \hat{\underline{\beta}} = \underline{\underline{X}} \left[\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{W}}\, \underline{\underline{X}} \right]^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{W}}\, \underline{Y} \qquad 9$$

The variance and covariance of the parameters can be calculated from:

$$\underline{\underline{C}}\, \sigma^2 = \left[\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{W}}\, \underline{\underline{X}} \right]^{-1} \sigma^2 \qquad 10$$

where $\underline{\underline{C}}$ is the variance-covariance matrix and σ^2 can be estimated from $S^2_{\underline{Y}}$:

$$C_{ii}\, \sigma^2 = VAR\left(\hat{\beta}_{i-1} \right), \quad C_{ij}\, \sigma^2 = COVAR\left(\hat{\beta}_{i-1}, \beta_{j-1} \right)$$

For the predictions:

$$\underline{\underline{D}}\, \sigma^2 = \underline{\underline{X}}\, \underline{\underline{C}}\, \underline{\underline{X}}^T \sigma^2 \qquad 11$$

where $$d_{ii}\, \sigma^2 = VAR\left(\hat{\gamma}_i \right), \quad \sigma^2 d_{ij} = COVAR\left(\hat{\gamma}_i, \hat{\gamma}_j \right)$$

To test the hypothesis that the model describes the system within experimental error, compute

$$S_e^2 = \frac{\sum_i^N \sum_j^{p_i} \left(y_{ij} - \bar{y}_i \right)^2}{\sum_i p_i - N} \qquad 12$$

$$S_r^2 = \frac{\sum_i^N w_i \left(\bar{y}_i - \hat{y}_i \right)^2}{N - Q} \qquad 13$$

where Q = number of model parameters, N = number of levels.

If $S_r^2 / S_e^2 < F_{1-\alpha}\, (N-Q,\ \Sigma P_i - N)$, then the model is judged to be correct within the limits of experimental error. If the model is correct, then an improved estimate of σ^2 would be:

$$\sigma^2 = \frac{\sum w_i \left(y_i - \hat{y}_i \right)^2 + \sum \sum \left(y_{ij} - \bar{y}_i \right)^2}{\sum p_i - Q} \qquad 14$$

To determine joint confidence intervals for the model parameters, the solution to:

$$\left(\hat{\underline{\beta}} - \underline{\beta} \right)^T \underline{\underline{X}}\, \underline{\underline{W}}\, \underline{\underline{X}} \left(\hat{\underline{\beta}} - \underline{\beta} \right) \leq Q\, \sigma^2\, F_{1-\alpha}$$

defines the $(1-\alpha)$ 100 % confidence limits in parameter space. With the appropriate experimental planning, for example the 2–level factorial composite designs, empirical models can be developed from experimental data, and probable variations of the parameters and predictions can be assessed relative to experimental error. This gives a quantitative measure of whether the model is a significantly good representation of the data, and a basis for choosing between of competeing functional forms.

DETERMINISTIC METHODS

Extractive metallurgy deals in general with particulate processes involving necessarily a countable number of entities. These possess a distribution of physical and chemical properties, the most common of which is the particle size distribution.

Distributions are expressed mathematically by either the cumulative distribution function $F_i(Z)$ or the density function $f_i(z)$. $F_i(\xi)$ gives the number (i=1), área (i=2) or mass (i=3) fraction of the particles with property $z \leq \xi$. The differential quantity $f_i(\xi)\,dz$ gives the corresponding fraction of the particles with property z in the range ξ to $\xi + dz$.

Mathematical modeling of particulate systems from the deterministic viewpoint attempts to develop general theoretical approaches to be used in determining the detailed kinetic behavior of the appropriate property distributions. To accomplish this it is necessary to consider, besides mass, momentum and energy balances, a population balance which conserves and identifies particulate distributions. In the next section the mathematical structure of such a balance is developed.

POPULATION BALANCE MODEL

To construct the population balance model we must define the following properties:

Let:

$n(x, y, z, t)$ = Total number of particles per unit geometrical volume at position x, y, z and time t.

$f(\xi;\ x, y, z, t)\,dZ$ = the fraction of particles at position x, y, z and time t with property Z in the range ξ to $\xi + dZ$.

$\psi = n(x, y, z, t)\ f_i(\xi;\ x, y, z, t)\ dZ\ dz\ dy\ dz$ = the population density: the total number of particles in the region of geometrical space [x, x+dx], [y, y+ +dy], [z, z+dz] and in the region of «property» space [ξ, ξ+dZ] at time t.

$u = dZ/dt$ = the property kinetics.

$B(\xi;\ x, y, z, t)\,dZ$ = the number of particles at position x, y, z and time t created per unit geometrical volume per unit time with property in the range ξ to $\xi + dZ$.

$D(\xi;\ x, y, z, t)\,dZ$ = the number of particles at position x, y, z and time t destroyed per unit geometrical volume per unit time with property Z in the range ξ to $\xi + dZ$.

The quantities B and D are called the birth and death functions, and account for changes due to instantaneous appearance or disappearance of particles, as oppossed to continuous changes. A familiar example would be the distribution of particles in grinding due to breakage in which the resulting daughter fragments are suddenly created.

A population balance requires that [1]:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (v\psi) + \frac{\partial}{\partial Z}(u\psi) + D - B = O$$

where $\dfrac{\partial \psi}{\partial t}$ = change in population density per unit time,

$\nabla \cdot (v\psi)$ = change (divergence) in population density due to motion in geometrical space (v is geometrical velocity).

$\dfrac{\partial}{\partial Z}(u\psi)$ = change in population density due to the continuous kinetics of property,

$D-B$ = net change in population density due to instantaneous creation and destruction of particles.

In most applications it is not convenient nor even possible to specify the detailed spatial dependence of ψ; thus, volume-averaged population densities must be used. The resulting equation is called the macroscopic population balance model:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial t}\left(V\overline{\psi}\right)+\frac{1}{V}\left(Q_2\overline{\psi}_2-Q_1\overline{\psi}_1\right)+\frac{\partial}{\partial Z}\left(u\overline{\psi}\right)+\overline{D}-\overline{B}=0 \qquad 2$$

where

$$\overline{\psi}=\frac{1}{V}\int\psi\, dV,\ \overline{D}=\frac{1}{V}\int D dV,\quad \overline{B}=\frac{1}{V}\int B dV;\ Q_1,\quad Q_2 = \text{volumetric flow rates}$$

at reference points 1, 2; V = volume considered.

It is assumed that the knetics of property Z is position independent, so that u = u(t).

Equations 1 and 2 present at least in principle a detailed and precise means of describing quantitatively the behavior of particulate systems in terms of property distributions. This is especially appropriate in mineral processing operations because products are generated whose properties are commonly measured with respect to distributions of particle size, grade, density, and other variables. In the most general formulation the population balance model is not analytically solvable, but for several important process applications it has been possible to simplify the equations to the point where meaningful solutions can be obtained. The predictive capability of these models is superior to empirical or less rigorously derived equations. The remainder of this paper will discuss applications of the model to the operations of grinding, flotation and leaching.

GRINDING

Historically, three approaches have been used in the analysis of tumbling mill grinding. These are Energy Size-Reduction relationships, Matrix Models, and Population Balance Models.

Energy size-reduction relationships ignore all details of feed and product size distributions and are empirical in nature. These relationships have been oriented towards evaluating the amount of energy needed to achieve a certain value of a single kinetic parameter chosen somewhat arbitrarily to represent the product size distribution. Since tumbling mills draw power at a constant rate, energy may be replaced by time to transform the relationship into a single-parameter kinetic expression.

The majority of these relationships can be written in the general form:

$$\frac{dEv}{dX}=-KX^{-N} \qquad 3$$

where E_v = Energy input per unit volume applied to the particulate system,

X = A characteristic particle size of the system.

The kinetic relationship is obtained by substituting $Ev = Pt/V_s$

where P = power draft, V_s = volume of solids.

$$\frac{dX}{dt}=-\frac{1}{K}\frac{P}{V_s}X^{N} \qquad 4$$

For evaluating energy needed to achieve a certain value of X, integration of equation 3 yields:

$$Ev=\begin{cases}\dfrac{K}{N-1}\left[X^{1-N}-X_o^{1-N}\right] & ,\ N\neq 1\\ K\ \ln\left(X/X_o\right) & ,\ N=1\end{cases} \qquad 5$$

where X_o = value of X in feed or when t = o depending on whether the grinding is continuous or batch.

For different values of N we have the famous «Laws» of comminution.

Kick's Law (1885): Equivalent amounts of energy applied to the system should result in equivalent changes in the size of the material being ground. This implies equal sized fragments and breakage resistence independent of particle size. Equation 5 becomes for N = 1:

$$E_v = K_1 \ln (X/X_o) \qquad 6$$

Rittinger's Law (1867): energy consumed is proporcional to the new surface produced per unit mass. Equation 5 becomes for N = 2:

$$Ev=K_2\left(\frac{1}{X}-\frac{1}{X_o}\right)$$

Bond's Law (1952): energy consumed is proportional to the total length of new cracks formed. Equation 5 becomes for N = 3/2: 7

$$Ev=K_{3/2}\left(\frac{1}{\sqrt{X}}-\frac{1}{\sqrt{X_o}}\right) \qquad 8$$

where X, X_o are the 80 % passing size of product and feed, respectively.

Bond's Law has been applied with considerable success in the dimensioning of industrial mills. This is due to the fact that equation 8 is satistied if the batch grinding product size distribution in the region

of application has a slope of 1/2 in the appropriately linearized transformations of the Gaudin-Schuhmann or Rosin-Rammler distributions. Fine grinding often has batch size distributions fitting these conditions. To approximate continuous grinding, multi-batch tests can be made until the mill product ceases to change. This state of equilibrium is equivalent to a continuous plug-flow mill operated in closed circuit. Since particle residence time distributions in mills approximate perfect mixers in series [2], this assumption is an especially bad one. Nevertheless, Bond's correlation is the most common method to perform mill calculations.

The second approach, that of Matrix Models, proposes a matrix $\underline{\underline{D}}$ which transforms the feed size distibution to that of the product for each breakage event as follows:

$$W_{pi} = \sum_{j}^{N} D_{ij} \; W_{Fj} \qquad 9$$

where W_{Pi} = Mass fraction of product in size fraction i
W_{Fj} = Mass fraction of feed in size fraction j
D_{ij} = Mass fraction of feed size j appearing in product size i

The matrix $\underline{\underline{D}}$ is divided into two parts. Let S_i^c = the mass fraction of material in the ith size class which is broken in one breakage event, and B_{ij}^e = the mass fraction of the breakage product from the ith size class which enters the jth size class during a breakage event.

A material balance after one breakage event yields:

$$W_{pi} = \left(1 - S_i^c\right) W_{Fi} + \sum_{j}^{i} B_{ij}^e \, S_j^c \, W_{Fj} \qquad 10$$

In matrix notation equation 10 becomes:

$$\underline{W}_P = \left[\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{B}}^e \, \underline{\underline{S}}^c \right] \underline{W}_F = \underline{\underline{D}} \, \underline{W}^F \qquad 11$$

where

$$\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{n×n diagonal matrix}$$

$$\underline{\underline{S}}^c = \begin{bmatrix} S_1^c & & & & & \\ & S_2^c & & 0 & & \\ & & S_3^c & & & \\ & 0 & & \ddots & & \\ & & & & & S_n^c \end{bmatrix} \qquad \text{n×n diagonal matrix}$$

$$\underline{\underline{B}}^c = \begin{bmatrix} B_{11}^c & & & & \\ B_{21}^c & B_{22}^c & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ B_{n1} & . & . & . & B_{nn}^c \end{bmatrix} \qquad \text{n×n lower triangular matrix}$$

For v identical stages of breakage:

$$\underline{W}_p = \underline{\underline{D}}^v \, \underline{W}_F \qquad 12$$

To arrive at an expression for the kinetics of grinding, the cycle factor v must be related to the real time variable. Once this is done the cycle selection functions S_i^c are estimated from experimental data; and in practice it is assumed that

$$\sum_{i=j}^{N} B_{ij} = \left[1 - \exp\left(di/dj \right) \right] \Big/ \left[1 - \exp\left(-1\right) \right] \qquad 13$$

a modified form of the Rosin-Rammler distribution. The variable d represents particle size.

Matrix models have been found to be useful in simulating single-pass devices in which the contact time is on the order of the time needed for particle fracture. For dynamic systems these models are inappropriate.

In contrast to Energy-Size Relationships or Matrix Models, Population Balance Models have the following advantage:

1) They represent the behavior of the entiresize distribution in contrast to Energy-Size Reduction correlations which characterize the size distribution with one parameter;
2) The time variable is explicitly accounted for,in contrast to Matrix Models which must correlate breakage cycles with time;
3) Process behavior is presented in terms of physically meaningful quantities associated with the actual mechanisms causing size reduction;
4) The averaging process inherent in the macroscopic population balance model effectively allows the behavior of the grinding process to be specified without a detailed knowledge of the mechanisms involved. In this sense, part of our ignorance about the spatial details of grinding is suppressed without severly prejudicing the model.

For batch grinding equation 2 can be arranged for solution from the following considerations:

$$Q_2 = Q_1 = o \qquad 14.a$$
$$Z = d \qquad 14.b$$
$$d(d)/dt = o \qquad 14.c$$

Equation 14.a signifies that the system is batch; equation 14.b, that the property of interest is the particle size; equation 14.c, that all continuous changes (for example, attrition) are negligible.

The macroscopic population balance model reduces to:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\overline{n} f_1(d,t)\right] = \overline{B} - \overline{D} \qquad 15$$

where $\overline{D}d(d)$ is the rate of breakage (number/volume-time) of particles having linear dimension d to d+d(d); $\overline{B}d(d)$ is the rate at which fragments, produced from breakage of sizes greater than d, enter the size interval d to d+d(d).

Define S(d, t), the Selection Function such that:

$S(d,t)\ \overline{n}\ f_1(d,t)\ d(d)\ dt$ = number of particles of size d to d+d(d) broken in time interval t to t+dt; and b_1 (d, d'), the number Breakage Function, such that:

b_1 (d, d') d(d) = number fraction of the fragments produced from breakage of particles of size d' which enters the size interval d to d+d(d).

The rate at which particles of size d' are broken is:

$S(d',t) = \overline{n} f_1(d',t)\ d(d')$, and the contribution to the interval d to d+d(d) resulting from the breakage of particles of size d' would be:

The total contribution from all sizes d' > d is:

$$\overline{B}\, d(d) = \int_d^{d\,max} b_1(d,d')\, S(d',t)\, \overline{n}\, f_1(d',t)\, d(d')\, d(d) \qquad 16$$

Equation 15 thus becomes:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\overline{n} f_1(d,t)\right] = -S(d,t)\,\overline{n}\, f_1(d',t) d(d') + \int_d^{dmax} b_1(d,d') S(d',t)\, \overline{n}\, f_1(d',t) d(d') \qquad 17$$

In view of the fact that the mass, and not the number, distribution is measured in practice, the population quantity can be changed from number to mass:

Let ρ be the density of the particles and C_3, the shape factor so that the mass of a particle of linear dimension d is $\rho\, C_3\, d^3$. The massa of particles of sizes d to d+d(d) is:

$$\rho\, C_3\, d^3\, n\, \overline{f}_1(d,t)\, d(d)$$

This same mass can be expressed in terms of the mass distribution density function:

$$(M/V)\ f_3\ (d,t)\ d(d)$$

Equation 17 can be written as:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[f_3(d,t) \right] = -S(d,t)\, f_3(d,t) + \int_{d}^{dmax} b_1(d,d')\, S(d',t) f_3(d',t)\, (d,d')^3\, d(d') \qquad 18$$

The quantity $(d,d')^3\ b_1\ (d,d')$ represents the mass of fragments in the size interval d to d+d(d) coming from size d' divided by the total massa of particles in size d'. In other words, it is the mass fraction of the breakage product from a particle of size d' ending up in size d to d+d(d). The massa breakage function can be defined as:

$$b_3\ (d,d')\ d(d) = (d'/d)^{-3}\ b_1\ (d,d')\ d(d) \qquad 19$$

The final form of the population balance model becomes:

$$\frac{\partial}{\partial t}\, f_3(d,t) = -S(d,t)\, f_3(d,t) + \int_{d}^{dmax} b_3(d,d') S(d',t) f_3(d',t) d(d') \qquad 20$$

In order to obtain a solution to equation 20 it is necessary to specify a functional form for the selection and breakage functions. In practice, grinding behavior is usually measured with sieve analyses, thus suggesting that a size-discretized form of the model would be more convenient than the size-continuous form.

Define $S_i(t)$ as the size-discretized selection function giving the fractional rate of breakage of particles out of the ith size class at time t, and b_{ij} as the size-discretized breakage function giving the fraction of breakage product from the jth (> ith) size interval appearing in the ith size interval. It is necessary that the size classes be small enough so that the grinding beavior is constant within the class. It has been found that classes interval ratios of $\sqrt{2}$ are sufficiently small for most applications. From these considera tions the size-discretized population balance model for batch grinding becomes:

$$\frac{d\Delta W_i}{dt} = -Si(t)\, \Delta Wi + \sum_{j}^{i-1} bij\, Sj\,(t)\, \Delta Wj \qquad 21$$

where ΔW_i = mass fraction of total material in size interval i.

Equation 21 can be written in matrix form as:

$$\frac{d}{dt}\Delta \underline{W} = -\left[\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{B}} \right] \underline{\underline{S}}\, \Delta \underline{W} \qquad 22$$

where

$$\Delta \underline{W} = \begin{bmatrix} \Delta W_1 \\ \Delta W_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta W_n \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} O & & & \\ b_{21} & O & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & O \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & & \cdot \\ b_{n_1} & b_{n_2} & \cdots & O \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} S_1 & & & \\ & S_2 & & O \\ & & \cdot & \\ & O & & S_{n-1} \\ & & & O \end{bmatrix}$$

If $\underline{\underline{S}}$ is constant and therefore independent of the size distribution in the mill which varies with time, then equation 22 has the analytical solution:

$$\Delta \underline{W}\,(t) = \exp\left[-\left(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{B}}\right) \underline{\underline{S}}\, t \right] \Delta \underline{W}\,(o) \qquad 23$$

The matrix exponential defined by the infinite series:

$$\exp\left[-\left(I\text{-}B\right) \underline{\underline{S}}\, t \right] = \sum_{k=o}^{\infty} \left[-\left(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{B}}\right) \underline{\underline{S}}\, t \right]^k \frac{1}{k!} =$$

$$\underline{\underline{I}} - \left(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{B}}\right) \underline{\underline{S}}\, t - \frac{1}{2}\left[\left(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{B}}\right) \underline{\underline{S}} \right]^2 t^2 + \ldots\ldots \qquad 24$$

is not easily evaluated. A more convenient solution arises by making a transformation:

$$\Delta \underline{W} = \underline{\underline{T}}\, \Delta \underline{W}^* \qquad 25$$

where $\underline{\underline{T}}$ is the matrix of eigenvectors of $-(\underline{\underline{I}}-\underline{\underline{B}})\,\underline{\underline{S}}$

$$T_{ij} = \begin{cases} 0 & i < j \\ 1 & i = j \\ \displaystyle\sum_{k=j}^{i-1} \frac{b_{ik}\, S_k\, T_{kj}}{S_i - S_j} & i > j \end{cases}$$

It is necessary that $S_i \neq S_j$ for $i \neq j$ to evaluate $\underline{\underline{T}}$, however in the improbable case of equality, the appropriate values of S_i and S_j can be made slightly different without prejudicing the simulation substan tially [3].

Substituting in equation 22 for $\Delta \underline{W}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\underline{\underline{T}}\, \Delta \underline{W}^*\right) = -\left[\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{B}}\right] \underline{\underline{S}}\, \underline{\underline{T}}\, \Delta \underline{W}^* \qquad \text{or} \qquad 27.a$$

$$\frac{d}{dt}\, \Delta \underline{W}^* = \underline{\underline{T}}^{-1}\left[-\left(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{B}}\right)\underline{\underline{S}}\right] \underline{\underline{T}}\, \Delta \underline{W}^* \qquad 27.b$$

The eigenvalues of $-(\underline{\underline{I}}-\underline{\underline{B}})\underline{\underline{S}}$ are distinct and equal to the S_i. The right hand side of equation 27.b can accordingly be written as:

$$\underline{\underline{T}}^{-1}\left[-\left(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{B}}\right)\underline{\underline{S}}\right] \underline{\underline{T}}\, \Delta \underline{W}^* = \underline{\underline{\Lambda}}\, \Delta \underline{W}^* \qquad 28$$

where $\underline{\underline{\Lambda}}$ is the diagonal matrix with elements $-S_i$

Therefore,

$$\Delta \underline{W}^*(t) = \begin{bmatrix} e^{-S_1 t} & & & O \\ & e^{-S_2 t} & & \\ & & \cdot & \\ O & & & e^{-S_{n-1} t} \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{J}}(t) \qquad 29$$

Back transforming to the original variable:

$$\Delta \underline{W}(t) = \underline{\underline{T}}\, \underline{\underline{J}}(t)\, \underline{\underline{T}}^{-1}\, \Delta \underline{W}(o) \qquad 30$$

When the selection functions are constant, the model is called linear. The breakage functions are not; and the cumulative breakage function for many systems are size normalizable, thus eliminating the necessity to separately determine the $n(n-1)/2$ values of the breakage function. Likewise the selection functions are often related by a power law, so that the $n-1$ values do not have to be separately calculated. Linear behavior has been verified for dry batch ball milling, but wet batch ball mill grinding and dry batch rod mill grinding show non-linear behavior.

Several efficient schemes have been developed for experimentally determining the selection and breakage functions for linear batch grinding systems. In addition, the variation of these parameters with operating conditions and dimensional factors (scale-up)) is usually of interest. These latter considerations are two of the weaknesses of the models as formulated, since there is no explicit indication how the selection and breakage functions depend on the operating conditions or mill dimensions. These relations must be determined empirically.

For linear grinding systems each size class can be analyzed separately, however the accuracy of measurement decreases with particle size. This is not toomuch of a problem, since the variation of the selection functions with respect to particle size is linear when plotted on log-log paper. An extrapolation to the smaller sizes gives a good approximation to the fine-size selection functions. The parameter itself is estimated by the slope of the $\ln \Delta w$ –vs– time linear relationship. This was done for dolomite in a dry laboratory ball mill [4]. Figures 1 and 2 show the verification of linear behavior and power-law dependence on particle size, respectively.

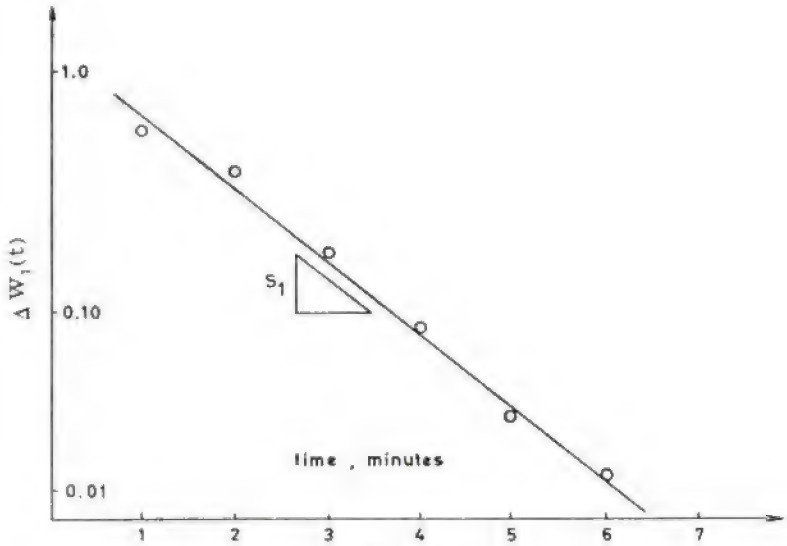


Figure 1

Determination of Selection Function for 7×9 # feed

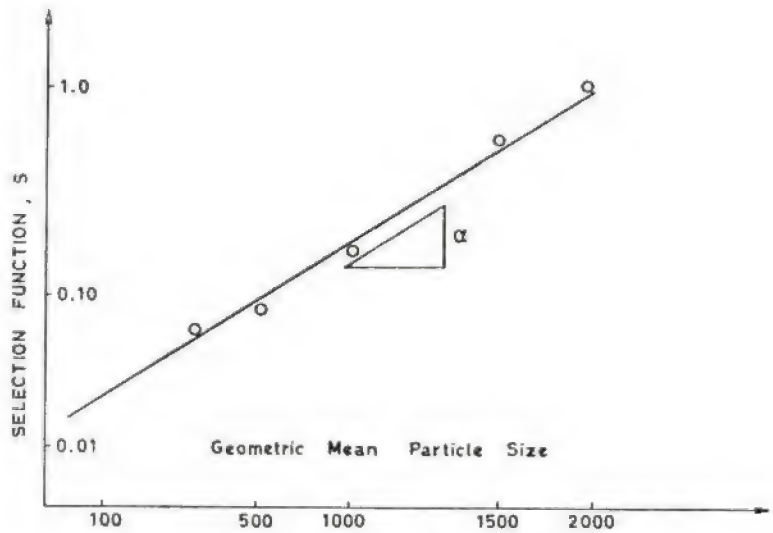


Figure 2

Selection Function Dependence on size

The selection function for linear behavior is:

$$S_i = \frac{d}{dt} \ln \Delta W_i \quad \text{(monosize particles present)} \qquad 31$$

$$S_i = S_1 \left(\frac{X_i \, X_{i+1}}{X_1 \, X_2} \right)^{\alpha/2}$$

Therefore, only a few of the larger size classes need to be determined, the rest being extrapolated.

The breakage functions can be estimated as follows: consider the second (to largest) size class. From equation 21 we have:

$$\frac{d\Delta W_2}{dt} = - S_2 \, \Delta W_2 + b_{21} \, S_1 \, \Delta W_1 \qquad 33$$

Remembering that initially there was only material in size class 1, it is possible to write:

$$\lim_{t \to 0} \frac{d\Delta W_2}{dt} = b_{21} \, S_1 \, \Delta W_1 \qquad 34$$

Therefore

$$b_{21} = \frac{1}{S_1 \Delta W_1(o)} \lim_{t \to o} \frac{d\Delta W_2}{dt} \qquad 35$$

In general,

$$b_{i1} = \frac{1}{S_1 \Delta W_1(o)} \lim_{t \to o} \frac{d\Delta W_i}{dt} \qquad 36$$

Equation 36 implies that the cumulative breakage function B_{i1}, the fraction of material broken out size class 1 which ends up in size class i and smaller, can be represented by

$$B_{i1} = \frac{1}{S_1} \lim_{t \to o} \frac{d F_{3,i}}{dt} \qquad 37$$

where $F_{3,i} = 1/\Delta W(o) \sum_{k=n}^{i-1} \Delta W_k$, the cumulative mass fraction finer than size class i. Figure 3 shows for small sizes the production rate of mass is constant. This has been referred to as the zero-order production of fine sizes [6]. In contrast, the disappearance of the top-size is first order. The intermediate sizes at first increase due to arrival of particles from the largest sizes, and then decrease due to breakage of the same particles out of the intermediate sizes. Therefore, the disappearance and production effects must be isolated in order to determine the selection and breakage functions, which respectively cause these effects.

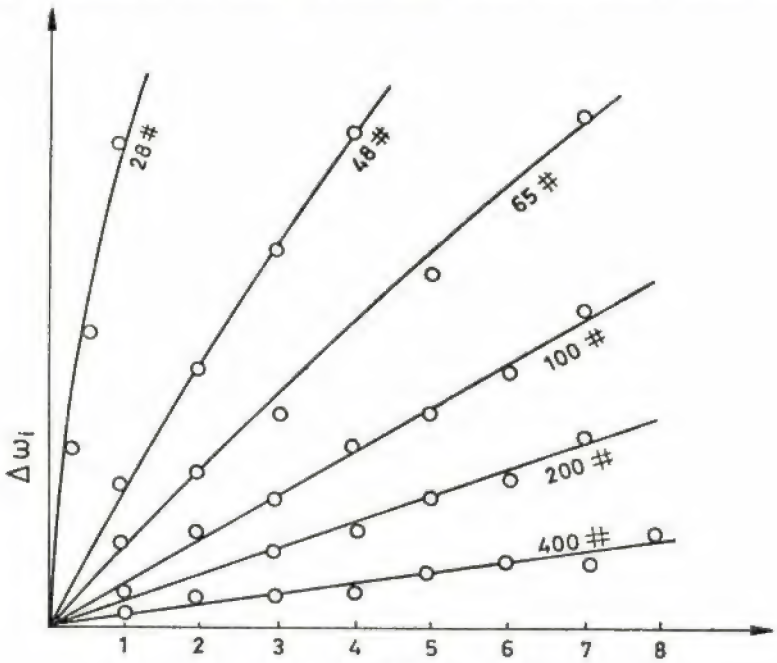


Figure 3
Zero-order Production plot for 7×9 mesh feed for Dolomite

All the breakage functions can be determined by changing the top size to the next smaller class, for example $7 \times 9 \rightarrow 10 \times 14$, and using equation 36. If the ratio between size classes is constant, say $\sqrt{2}$, then.

$$B_{ij} = B_{i-j+1,1} \qquad i < n \qquad 38$$

and

$$B_{nj} = I - \sum_{k=j}^{n-1} b_{kj} \qquad 39$$

is generally employed to calculate the breakage functions for the smallest size. It has been found for several mineral systems that the cumulative breakage function is size normalizable, thus allowing extrapolation to the smaller sizes.

Several important types of batch grinding exhibit non-linear behavior. The prime examples are wet ball mill, rod mill, and mixture grinding. In wet ball milling the fines are suspended in the fluid, thereby increasing the probability of breakage of the coarser particles. In rod mills this effect is even more pronouncied since breakage occurs along the lines where the rods make contact, thus resulting in coarser particles protecting the smaller ones. Mixture grinding is non-linear due to the effects of the components being ground, in which one component is softer than the other. In general, non-linear grinding behavior is cau-

sed by a dependence of the selection functions and possibly (but usually not) the breakage functions on the changing environment within the mill. In linear systems the environment also changes, but the kinetic parameters are independent of the changes.

Linear systems offer several calculational advantages, among which are the existence of closed form analytical solutions and the availability of efficient techniques to evaluate the model parameters. To solve rigorously non-linear models, numerical techniques must be used. Furthermore, the implicit dependence of the selection function on grind time must be determined by extensive experimental measurements. Ignoring the non-linear nature of the system under investigation will give precise answers for the reference point (time) at which the model parameters were determined, but the responses decrease in accuracy as the region of application deviates from the reference point.

Several implicit linearization schemes have been developed that give acceptable approximations for non-linear grinding systems over a small range of mill environment changes. It should be emphasized that the model parameters are an explicit function of the mill environment and not a function of time. The implicit relationship with time is caused by the dependence of the mill environment on time.

A rigorous mathematical treatment of linearization of the selection function has been made by Herbst and Mika [6]. The breakage function is generally not considered to be dependent on the mill environment. The linearization is based upon a Taylor's expansion of the selection functions around the reference point where the selection functions were evaluated. For each selection function:

$$S_i(\underline{m})m_i(t) \simeq S_i(\underline{m}^*)\, m_i^* + \sum_j^n \left[\frac{\partial}{\partial m_j}\left(S_i(\underline{m}^*)m_i^*\right)\left(m_j(t) - m_j^*\right)\right] \qquad 40$$

In equation 40 the «*» refers to the reference condition; $\underline{m}$ is the vector of mass fractions for all size classes.

In matrix form equation 40 becomes:

$$\underline{\underline{S}}\,\underline{m} = \underline{\underline{S}}^*\,\underline{m}^* + \underline{\underline{\nabla}}^*\left(\underline{m}(t) - \underline{m}^*\right) \qquad 41$$

where

$$\nabla_{ij}^* = \left[\frac{\partial}{\partial m_j} S_i(\underline{m}^*)m_i^*\right]$$

Substitution of equation 41 into 21 yields:

$$\frac{d}{dt}\left(m_i(t)\right) = -S_i^*\, m_i^* + \sum_j^{i-1} b_{ij}\, S_j^*\, m_j^* + \sum_k^n \alpha_{ik}\left(m_k - m_k^*\right) \qquad 42$$

where

$$\alpha_{ik} = \sum_l^{i-k}\left[b_{il}\, \frac{\partial S_l^*\, m_l^*}{\partial m_k} - \frac{\partial S_i^*\, m_i^*}{\partial m_k}\right] = \sum_l^{i-k}\left(b_{il}\, \nabla_{lk}^* - \nabla_{ik}^*\right)$$

The matrix form of equation 42 is:

$$\frac{d}{dt}\underline{m}(t) = -\left[\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{B}}\right]\underline{\underline{S}}^*\,\underline{m}^* - \underline{\underline{\alpha}}\,\underline{m}^* + \underline{\underline{\alpha}}\,\underline{m}(t) \qquad 43$$

As formulated, equation 43 is linear and admits an analytical solution:

$$\underline{m}(t) = \underline{m}(o)\exp\left(\underline{\underline{\alpha}}\,t\right) - \left[\exp\left(\underline{\underline{\alpha}}\,t\right) - \underline{\underline{I}}\right]\underline{\underline{\alpha}}^{-1}\left[\left(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{B}}\right)\underline{\underline{S}}^* + \underline{\underline{\alpha}}\right]\underline{m}^* \qquad 44$$

As in the linear case, the matrix exponential must be replaced by a more practical from for computation. The similarity transformation required for the non-linear case is in general not possible to determine because the eigenvalues of a complete matrix like α are not calculable. The linear case had a lower triangular matrix in which the eigenvalues were calculable, in general. To facilitate this simplification it would be necessary to assume that the selection function in each size class depended only on the corresponding mass fraction, m_i, and not on the entire size distribution. Thus $S_i = S_i\ (m_i)$.

$$\nabla_{ij}^* = \frac{\partial S_i^*\, m_i^*}{\partial m_i(t)} + S_i^* \qquad i = j\ ,\ \nabla_{ij}^* = O\ \ i \neq j \qquad 45$$

$$\alpha_{ik} = \sum_l^{i-k}\left[b_{il}\left(\frac{\partial S_l^*\, m_l^*}{\partial m_l} + S_l^*\right)\partial_{lk} - \left(\frac{\partial S_i^*\, m_i^*}{\partial m_l} + S_i^*\right)\partial_{ik}\right] \qquad 46$$

where $\partial_{ii} = 1$, $\partial_{ij} = 0$

Let

$$S_j^*\, \phi_j = \frac{\partial S_j^*\, m_j^*}{\partial m_j} + S_j^* \qquad \text{; then}$$

$$\alpha_{ik} = \sum_l^{i-k}\left[b_{il}\ \phi_l\ S_l^*\, S_{lk} - \phi_i\, S_i^*\, \partial_{ik}\right] \qquad 47$$

or in matrix form:

$$\underline{\underline{\alpha}} = \left[\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{B}} \right] \underline{\underline{\phi}}\ \underline{\underline{S}}^{*} \qquad 48$$

in which $\underline{\underline{\alpha}}$ is now a lower triangular matrix with eigenvalues $\phi_i\ S_i^*$. Therefore,

$$\underline{m}(t) = \underline{\underline{T}}^{*}\ \underline{\underline{J}}(t)\ \underline{\underline{T}}^{*^{-1}}\ \underline{m}(o) + \left[\underline{\underline{T}}^{*}\ \underline{\underline{J}}(t)\ \underline{\underline{T}}^{*^{-1}} - \underline{\underline{I}} \right] (\underline{\underline{\phi}}^{-1} - I)\ \underline{m}^{*} \qquad 49$$

Normally, the values of $\underline{\underline{\phi}}$ are determined empirically from experimental data; however, for wet ball milling [7] and mixture grinding [6], it has been possible to establish a relationship between ϕ and m *. With the linearized solution to the batch grinding equation, a number of a non-linear systems have been simulated. Figure 4 shows the predictions of dry rod milling of dolomite [8]. The reference distribution was that of 1 minute, i.e. $\underline{m}^* = \underline{m}\ (1)$. The linearized model appears to be accurate up to about 3 - 5 minutes:

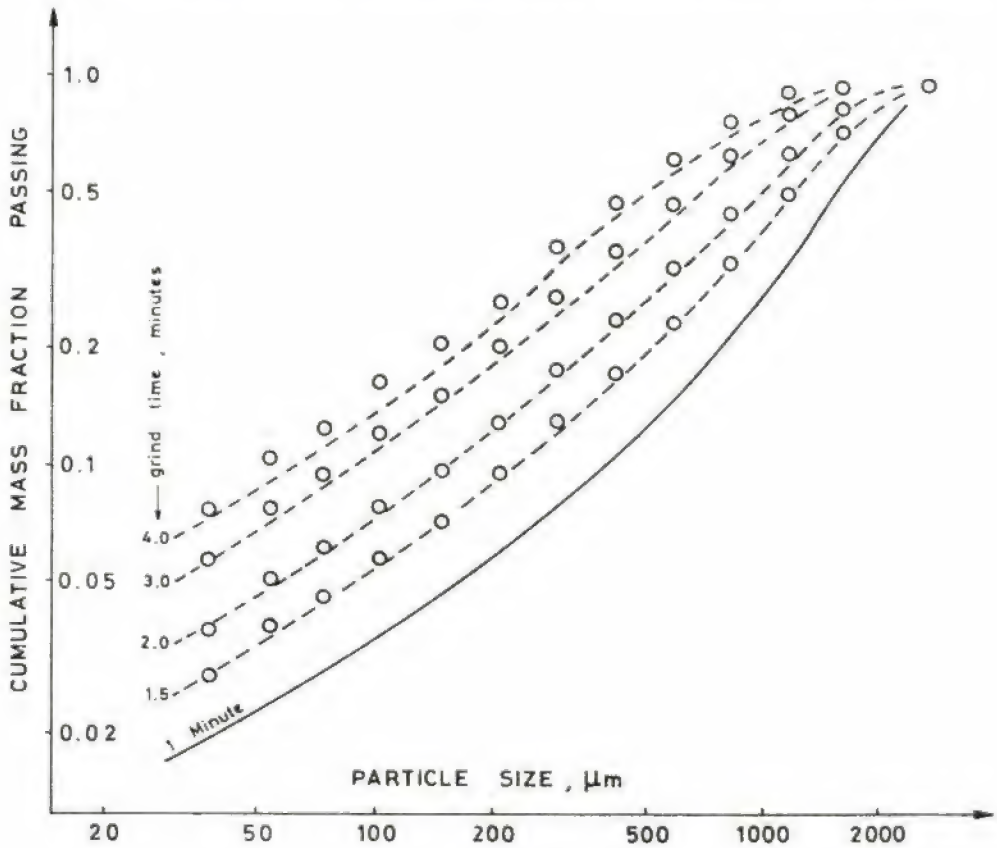


Figure 4
Dry Rod Mill Grinding of Dolomite

Grinding applications invariably end up at the industrial level not in the batch, but in the continous regime. It is therefore important to extend the prediction of size reduction from batch to continuous systems. This is done combining mass transport through the mill with the kinetics of batch grinding.

Population balance models of continuous milling have been developed to handle steady state or dynamic conditions in which the distribution of material along the axis of the mill is explicitly considered [9]: To obtain a tractable example for the purposes of this study, a simplified, yet practical, case will be briefly discussed.

In many continuous grinding systems it is possible to assume that:

1) Steady-state conditions in material transport prevail.
2) The transport process is the same for all particle sizes.
3) The size reduction kinetics are linear.

Under the above assumptions, the batch kinetics would describe the size reduction for each particle size if the time of residence in the mill were known. The product size distribution can thus be considered

an average of the batch responses, weighted with respect to the distribution of residence times. If E (t) dt is the fraction of particles which spend time t to t + dt in the mill, then the continuous mill response will be:

$$\underline{m}_c = \int_0^{\infty} \underline{m}_B(t) E(t)\, dt \qquad 50$$

where $\underline{m}_c$ is the continuous system size distribution of mill product, and $\underline{m}_B$ is the batch response, Combining 50 with equation 30, we have:

$$\underline{m}_c = \underline{\underline{T}}\, \underline{\underline{J}}_c\, \underline{\underline{T}}^{-1} \underline{m}(o) \qquad 51$$

where

$$Jc_{ii} = \int_0^{\infty} \exp(-S_i t) E(t)\, dt \qquad 52.a$$

$$Jc_{ij} = O \qquad 52.b$$

Under conditions of perfect mixing in which $E(t) = \frac{1}{\tau} \exp(-t/\tau)$, τ being the mean residence time,

$$Jc_{ii} = 1/(S_i z - 1) \qquad 52.c$$

Equation 51 and 52-a, b imply that it the amount of time that particles of a given size spend in the mill is accounted for and used as a weigthing factor, the continuous solution is the same as the equivalent batch solution summed over all possible residence times.

This type of continuous model is called a lumped parameter model because the residence time distribution is «lumped» or averaged into one parameter, the mean residence time. In the general case, size dependent transport must be accounted for by convection and dispersion considerations. This introduces non--linearities into the model, even if the particle breakage process is linear. However, in a recent computational study [2] it was found that the error introduced by lumped parameter approximations was on the order of the experimental error associated with the measurement of the corresponding product size distributions.

In summary, although grinding is an extremely complicated process, it has been possible in the context of the population balance to analyze and predict with good accuracy the behavior of both batch and continuous syze reduction systems. In the case of mill-environment-independent kinetic parameters and material transport, analytical solutions are possible. These have been applied with good results to many grinding systems.

FLOTATION

The modeling of flotation on the industrial scale is a relatively recent accomplishment, the most complete models emanating from the National Institute for Metallurgy in South Africa [10].

In that formulation three mineral properties are considered to be the most influential on the rate of flotation. These are the surface activity, mineral composition, and particle size. The overall rate is also effected by operating properties such as the froth return rate, bubble surface area available for particle adherence, distribution of solids and bubble residence times. These operating properties are determined by the operating conditions and the mineral properties. Based on these considerations a first order rate equation has been developed and tested in which the overall rate of flotation can be expressed as:

$$r(k,G,D) = \gamma R\, \phi(D)\, A \overline{S} f_3(k,G,D)\, W \qquad 53$$

where
- r = rate at which mass enters the stream, a function of surface activity, mineral composition, particle size.
- γ = fraction of pulp entering froth region which does not return to the pulp.
- k = constant allowing for effects other than particle size or bubble surface area.
- $\phi(D)$ = function to allow for effect of particle size.
- A = total bubble surface area per unit volume of pulp.
- $\overline{S}$ = average fraction of total bubble surface area available for flotation.
- W = total mass of solids in the pulp.
- f_3 = density function for distribution of mass among properties of the solids.

$$\phi(D) = (2{,}33\, \varepsilon^{1/2}/D) \exp(-\varepsilon/D^2)\, (1-(D/D_o)^{1.5})$$

$\varepsilon = \frac{1}{2} D_{\infty}^2$; D_o = max size particle floatable.

$D\infty$ = particle size where recovery is maximum.

For the batch cell equation 53 can be integrated to yield:

$$W(t)f_3(k,G,D;t) = W(o)f_3(k,G,D;o)\exp\left[-k\phi A\int_0^t \gamma\overline{S}dt\right] \qquad 54$$

in which it is recognized that γ, $\overline{S}$ are dependent on time.

For the continuous cell a mass balance at steady state gives:

$$M_{IN}\, f_{3IN}\, k,G,D) - M_{OUT}\, f_{3OUT}(k,G,D) = \gamma k\phi(D)\overline{AS}Wf_3\,(k,G,D) \qquad 55.a$$

where M_{IN}, M_{OUT} are the total mass flowrate in the feed and tails, respectively.

If the flotation cell is assumed to be a perfect mixer, then

$$f_3(k,G,D) = f_{3\,OUT}\,(k,G,D).$$

Thus,

$$M_{OUT}\, f_{3OUT}(K,G,D) = \frac{M_{IN}\, f_{3IN}\,(k,G,D)}{1 + k\gamma\phi(D)A\overline{S}W/M_{OUT}} \qquad 55.b$$

From these models all recoveries and grades can be calculated for the product streams of each cell. The models are complex, but computer programs available from the authors incorporate all necessary calculations. Comparisons with industrial and pilot-plant data have been made, demonstrating the efficacy of the models.

HYDROMETALLURGY

Hydrometallurgical processes are receiving much attention recently because of the reduced energy consumption and air pollution involved in these unit operations as compared to their alternatives. The operation of leaching is now an important step in the processing of many metals. Almost every copper mining company in the world has a copper leaching operation in conjunction with their flotation process. Other metals such as aluminum, magnesium, lead, zinc, uranium, manganese and rhenium are products of leaching operations.

One of the most industrially important processes is that of flotation concentrate leaching, which extracts in solution metal values from particles of varying properties and, in the case of continuous leaching, exposure to the lixiviant. The process mechanisms are multi-faceted in that they involve mass and/or heat transfer, disperse phase reactions, and bulk flow.

The final section of this work will discuss the development of mathematical models for single and multiple particle leaching in batch and continuous systems.

Single Particle Kinetics

For an individual particle, the kinetics of leaching is influenced be the geometry of the particle and of the mineralization. Some particles, for instance, have their mineralization confined to thin layers on solid, inert surfaces. In that case the surface available for reaction is unchanging. For other particles the reaction can occur at a sharply defined interface which moves into the particle as the reaction proceeds.

The first type of reaction geometry in which there is a stationary reaction front can be considered to consist of a system or matrix of pores on the surface of or inside the particle. The lixiviant is consumed by mineral species C liberating metal component B. For the purpose of example it will be assumed that the particle is spherical.

$C_B\,(r_1\,t)$ = concentration of B at distance r from center of particle at time t.
$N_B\,(r)$ = flux (mass/area-time) of B at position r due to diffusion.
R_B = rate of production via chemical reaction of B per unit volume.

A mass balance for a spherical shell at radius r inside the particle gives: Rate of accumulations of B = Rate entering shell − Rate leaving shell + Rate of productionby chemical reaction. Thus,

$$4\pi\, r^2 N_B(r) - 4\pi(r + dr)^2\, N_B(r + dr) + R_B\, 4\pi r^2 dr = \frac{\partial}{\partial t}\, C_B(r,t) 4\pi r^2 dr \qquad 57$$

From Fick's Law:

$$N_B(r) = -D_B\, \partial C_B(r,t)/\partial r$$

where D_B = effective coefficient of diffusion for component B.
Substituting:

$$\frac{D_B}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial C_B}{\partial r}(r,t)\right]+R_B=\frac{\partial C_B}{\partial t}(r,t) \qquad 58$$

The flux of B arriving at the surface of the particle is equal to that going into solution:

$$N_B(R)=-D_B\frac{\partial C_B}{\partial R}(R,t)=kg\left[C_B(R,t)-\tilde{C}_B\right] \qquad 59$$

where R = radius of particle, kg = mass transfer coefficient across stagnant fluid layer adjaccent to particle surface, $\tilde{C}_B$ = concentration of B in the same fluid layer.

The particular chemical reaction kinetics for the term R_B will generate a partial differential equation which can sometimes be solved analytically or otherwise with numerical techniques.

For example, let $R_B = -k_S\ C_B\ A$

where k_S = surface reaction rate constant and A is average surface area per unit volume. If diffusion is slow compared to chemical reaction and bulk transfer into the solution, then equation 58 admits the solution

$$C_B(r,t)=C_B(r,o)\frac{2R}{\pi r}\sum_n^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\operatorname{Sin}\left(\frac{n\pi r}{R}\right)\exp\left(-D_B n^2\pi t/R^2\right) \qquad 61$$

$$X_B(R,t)=1-\frac{6}{\pi^2}\sum_n^{\infty}\frac{1}{n^2}\exp\left(-D_B n^2\pi^2 t/R^2\right) \qquad 62$$

where $X_B(R,t)$ = fraction of B leached at timet. It is assumed that $\tilde{C}_B = O$.

If the chemical reaction is rate controlling, the solution to equation 58 is:

$$\begin{aligned} C_B(t) &= k_S\ C_B(o)\ At & t &< t\,max \\ C_B(t) &= C_B\ (t\,max) & t &\geq t\,max \\ X_B(t) &= k_S\ C_B(o)\ At/\rho_C & t &< t\,max \\ X_B(t) &= 1 & t &\geq t\,max \end{aligned} \qquad 63$$

Thus the fraction leached vs time for particles of equivalent dimensions would have the forms of fig. 5.

The case in which there is a moving reaction front has been intensively studied in applications to copper sulfide leaching. The resulting mathematical model, called the «shrinking core model», developed for spherical particles proposes that there is an unreacted core of minerals containing the valuable component which is impervious to the lixiviant. As the reaction procedes the core recedes from the particle surface leaving a product layer through which reactants and products travel to reach the reaction boundary or surrounding solution, respectively.

To enable the development of solvable models it is generally assumed that the velocity with which the core shrinks is small compared to the rate of diffusion in the product layer. This assumption is valid for moderate levels of lixiviant concentration in the solution. In addition the density of the particle is considered to be constant during leaching.

Let a moles of lixiviant A react with c moles of mineral C to produce b moles of valuable metal B in ionic form. The initial radius of the particle is R; r_c is the radius of the unreacted core at time t. For species A and B the following mass balances apply:

$$\frac{D_A}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial C_A}{\partial r}(r,t)\right]=\frac{\partial C_A}{\partial t}(r,t)=O \qquad r_c\leq r\leq R \qquad 64\,a$$

$$\frac{D_B}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial C_B}{\partial r}(r,t)\right]=\frac{\partial C_B}{\partial t}(r,t)=O \qquad r_c\leq r\leq R \qquad 64\,b$$

Equation 64 says that a steady-state exists in the product layer at each radial distance r between the core

surface and the surface of the particle. This is because the core appears to be stationary relative to a rapidly diffusing species.

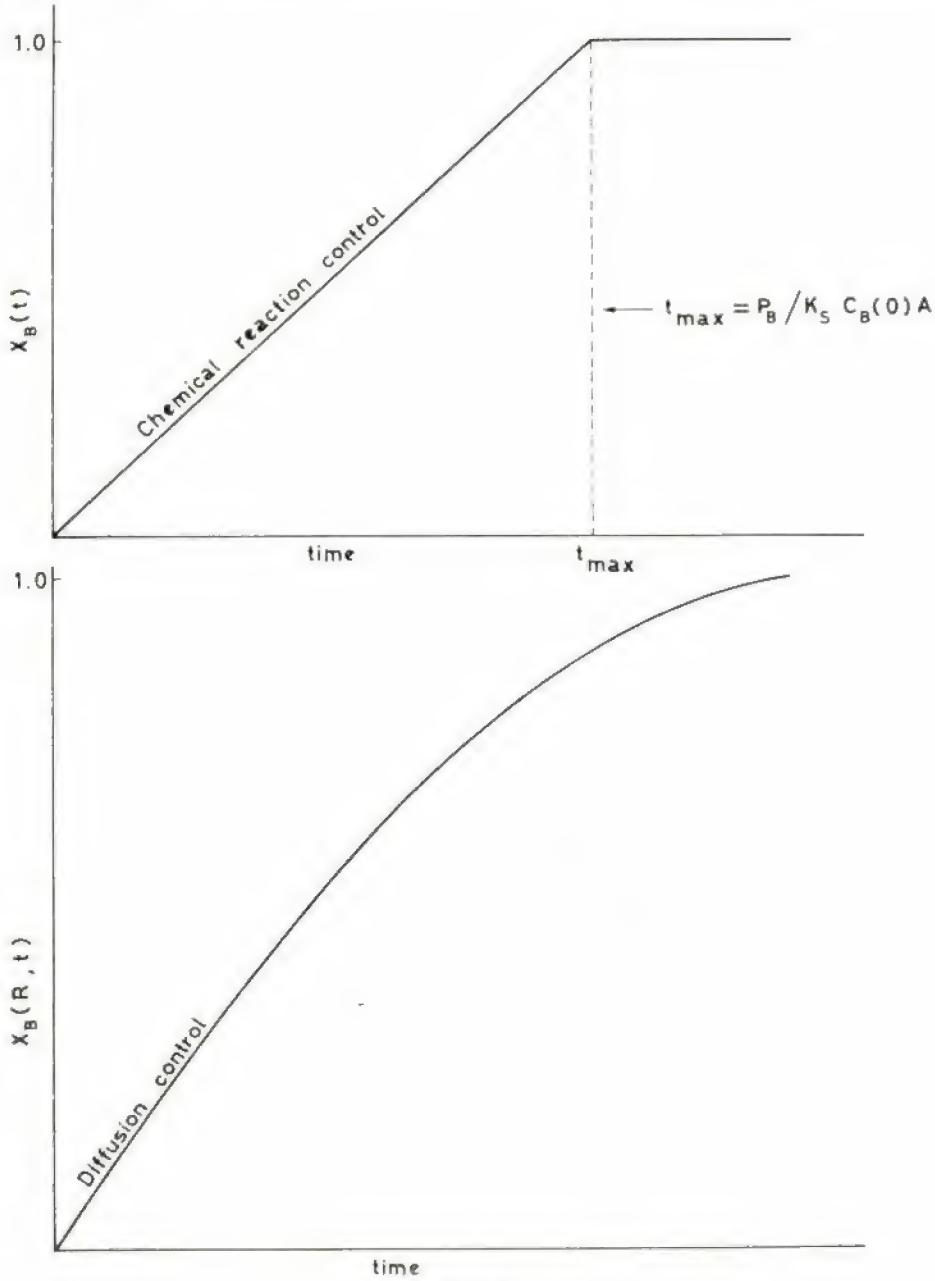


Figure 5

Fraction leached vs time

Considering that the particle mass can be calculated by:

$$Mr = \frac{4}{3} \pi r^3 \qquad 65$$

a reaction of first order in concentration and surface area can be expressed kinetically as:

$$\frac{dMr}{dt} = - k_s C_A (r,t) A\ c/a \qquad 66$$

where $A = 4 \pi r^2$, the surface area of a spherical portion of the particle of radius R or the surface area of a particle of radius r, k_s = surface reaction rate constant, c/a = ratio expressing the reactistoichiometry, the moles of mineral leacheed per mole of lixiviant.

From these considerations the core radius can be determined as a function of lixiviant concentration:

$$\frac{dr_c}{dt} = -\frac{c/a\, k_s\, C_A\,(r_c,t)}{\rho c} \qquad 67$$

In addition Fick's Law applied at the reaction and particle surface gives the following boundary conditions:

$$-D_A \frac{\partial C_A\,(r_c t)}{\partial r_c} = k_s\, C_A\,(r_c,t) \qquad 68.a$$

$$-D_B \frac{\partial C_B\,(r_c t)}{\partial r_c} = \frac{b}{a}\, k_s\, C_A\,(r_c,t) \qquad 68.b$$

$$-D_A \frac{\partial C_A\,(R,t)}{\partial R} = k_g(C_A(R,t) - \tilde{C}_A) \qquad 68.c$$

$$-D_B \frac{\partial C_B\,(R,t)}{\partial R} = Kg(C_B(R,t) - \tilde{C}_B) \qquad 68.d$$

where $\tilde{C}$ = concentration of species in bulk solution.

Considering component A, equation 64-a can be solved to yield:

$$C_A\,(r,t) = \tilde{C}_A + (\tilde{C}_A\,(r_c,t) - \tilde{C}_A)\left[\frac{1}{r/r_c - r/R} + \frac{1}{1 - R/r_c}\right] \qquad 69$$

in which case

$$-D_A \frac{\partial C_A}{\partial r_c}(r_c,t) = D_A\, \frac{\tilde{C}_A - C_A(r_c,t)}{r_c^2/R - r_c} \qquad 70.a$$

and

$$-D_A \frac{\partial C_A}{\partial R}\,(R,t) = D_A\, \frac{\tilde{C}_A - C_A(r_c,t)}{R - R/r_c} \qquad 70.b$$

Substituting the above expressions into equations 68-a and 68-c and combining, a solution for $C_A\,(r_c,t)$ is obtained:

$$C_A\,(r_c,t) = \tilde{C}_A \Big/ \left(k_s\left(\left(1/k_g\right)\left(\frac{r_c}{R}\right)^2 + (1/D_A)\left(r_c - r_c^2/R\right) + 1/k_s\right)\right) \qquad 71$$

The recession velocity of the core can now be calculated from equation 67:

$$\frac{dr_c}{dt} = -(c/a)\,\tilde{C}_A \Big/ \left(\rho_c\left(\frac{1}{k_g}\left(\frac{r_c^2}{R}\right)^2 + \frac{1}{D_A}\,(r_c - r_c^2/R) + \frac{1}{k_s}\right)\right) \qquad 72$$

The mass fraction of C reacted at time t is:

$$X_c(t) = 1 - (r_c/R)^3 \qquad 73$$

and

$$\frac{dX_c(t)}{dt} = -\frac{3}{R}\left(\frac{r_c}{R}\right)^2 \frac{dr_c}{dt} \qquad 74$$

Therefore,

$$\frac{dt}{d}\, X_c\,(t) = (c/a)\tilde{C}_A \Big/ \left[\frac{R\rho c}{3}\left(\frac{1}{k_g} + \frac{R}{D_A}\left(\left(1\text{-}X_c(t)\right)^{1/3} - 1\right) + \frac{1}{k_s}\left(1\text{-}X_c(t)\right)^{-2/3}\right]\right. \qquad 75$$

The above equation can be integrated to obtain:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{R^2}{D_A} - \frac{R}{k_g}\right)X_c(t) + \frac{R^2}{2D_A}\left[\left(1\text{-}X_c(t)\right)^{2/3} - 1\right] + \frac{R}{k_s}\left[\left(1\text{-}X_c\,(t)\right)^{1/3} - 1\right] = -\,\tilde{C}_A t\, \rho c\,(a/c) \qquad 76$$

This solution is good as long as the quatity:

$$\lambda = \tilde{C}_A/\rho c(c/a) \leq 0.5$$

If this condition is violated then the unsteady state solution must be used.

Multiple Particle Systems

For batch systems all particles of the same size will have the same fraction leached — vs — time curves. Other particles will have a rather complex re lationship to the reference particles due to the size function exhibited by equation 76. However, the fraction leached can be transformed into a cubic equation in $Z=(1-X_c)^{1/3}$ and solved explicitly for $X_c=X_c\ (R, t)$. Then the fraction leached of the feed size distribution can be calculated by considering all sizes as follows:

$$X_c(t)=\int_{d_{min}}^{d_{max}} X(d,t)\, f_3(d)\, d(d) \qquad 77$$

where $d=2R$, $f3(d)$ = density function for feed size distribution.

For continuos leaching in a well-mixed vessel, the population balance must be considered because of the distribution of residence times. Under the steady-state assumption the macroscopic population balance model reduces to:

$$\frac{d}{d(d)}\left[\frac{d(d)}{dt}\bar{\psi}\right]=\frac{1}{V}\left(Q\,\bar{\psi}_{IN}-Q\,\bar{\psi}\right) \qquad 78$$

Defining the mean residence time τ as

$$\tau=V/Q \qquad 79$$

a mass balance on the lixiviant concentration gives:

$$C_{A\,IN}-C_{A\,OUT}=\frac{a}{c}\left[\int_{d_{min}}^{d_{max}} \rho_c C_3 d^3\,\bar{\psi}_{IN}\, d(d)-\int_{o}^{d_{max}} \rho_c C_3 d^3\,\bar{\psi}\, d(d)\right] \qquad 80$$

Equation 78 can be solved for $\bar{\psi}$ knowing $\bar{\psi}_{IN}$, τ and the constants associated with $d(d)/dt$ in equation 72. Unless the surface reaction is rate controlling, the solution to 78 is not analytical. To arrive at this solution, let the feed be uniform. These assumptions are not particularly common in applications of continuous leaching of concentrates; however, they are not unrealistic because the uniform feed size distribution can be used as a basis to discretize the real system.

Thus,
$$\frac{d(d)}{dt}=2\frac{dr_c}{dt}=-\frac{2\,k_s\,C_{A,OUT}}{\rho_c(a/c)}=-K\,C_{A\,OUT} \qquad 81$$

The recession velocity of the unreacted core being constant gives as a solution assuming

$$\bar{\psi}_{IN}=\begin{cases}\bar{n}_I/(d_{max}-d_{min}) & d_{min}\leq d\leq d_{max}\\ o & \end{cases} \qquad 82$$

where $\bar{n}_I$ = average number of particles per unit volume in feed; d min, d max = minimum, maximum particle size in feed.

$$\bar{\psi}=\frac{\bar{\psi}_{IN}\,\bar{n}\left[\exp(-(d_{min}-d)/K\,C_{A\,OUT}\,\tau)-\exp(-(d_{max}-d)/K\,C_{A\,OUT}\,\tau)\right]}{1-K\,C_{A\,OUT}\,\tau\,\bar{\psi}_{IN}/\bar{n}_I\left[\exp(-d_{min}/KC_{A\,OUT}\,\tau)-\exp(-d_{max}/KC_{A\,OUT}\,\tau)\right]} \qquad 83$$

for $d\leq d_{min}$.

$$\bar{\psi}=\frac{\bar{\psi}_{IN}\,\bar{n}\left[1-\exp(-(d_{max}-d)/KC_{A\,OUT}\,\tau)\right]}{1-KC_{A\,OUT}\,\tau\,\bar{\psi}_{IN}/\bar{n}_I\left[\exp(-d_{min}/KC_{A\,OUT}\,\tau)-\exp(-d_{max}/KC_{A\,OUT}\,\tau)\right]} \qquad 84$$

for $d\geq d_{min}$.

$$f_i(d)=\bar{\psi}/\bar{n}\ ,\quad f_3(d)=d^3 f_i(d)/\int d^3 f_i(d)\, d(d) \qquad 85$$

$$C_{A\,IN}-C_{A\,OUT}=\frac{(a/c)\,\rho_c\,\bar{n}_I\,\pi}{6\,(d_{max}-d_{min})}\,P(KC_{A\,OUT}\,\tau) \qquad 86$$

$$P(X)=(d^3_{max}-d^3_{min})\,X-3\,(d^2_{max}-d^2_{min})\,X^2+6\,(d_{max}-d_{min})\,X^3-$$
$$-6(\exp(-d_{max}/X)-\exp(-d_{min}/X)\,X^4 \qquad 87$$

To simulate a specific case let:

d max = 200 mm
d min = 50 mm

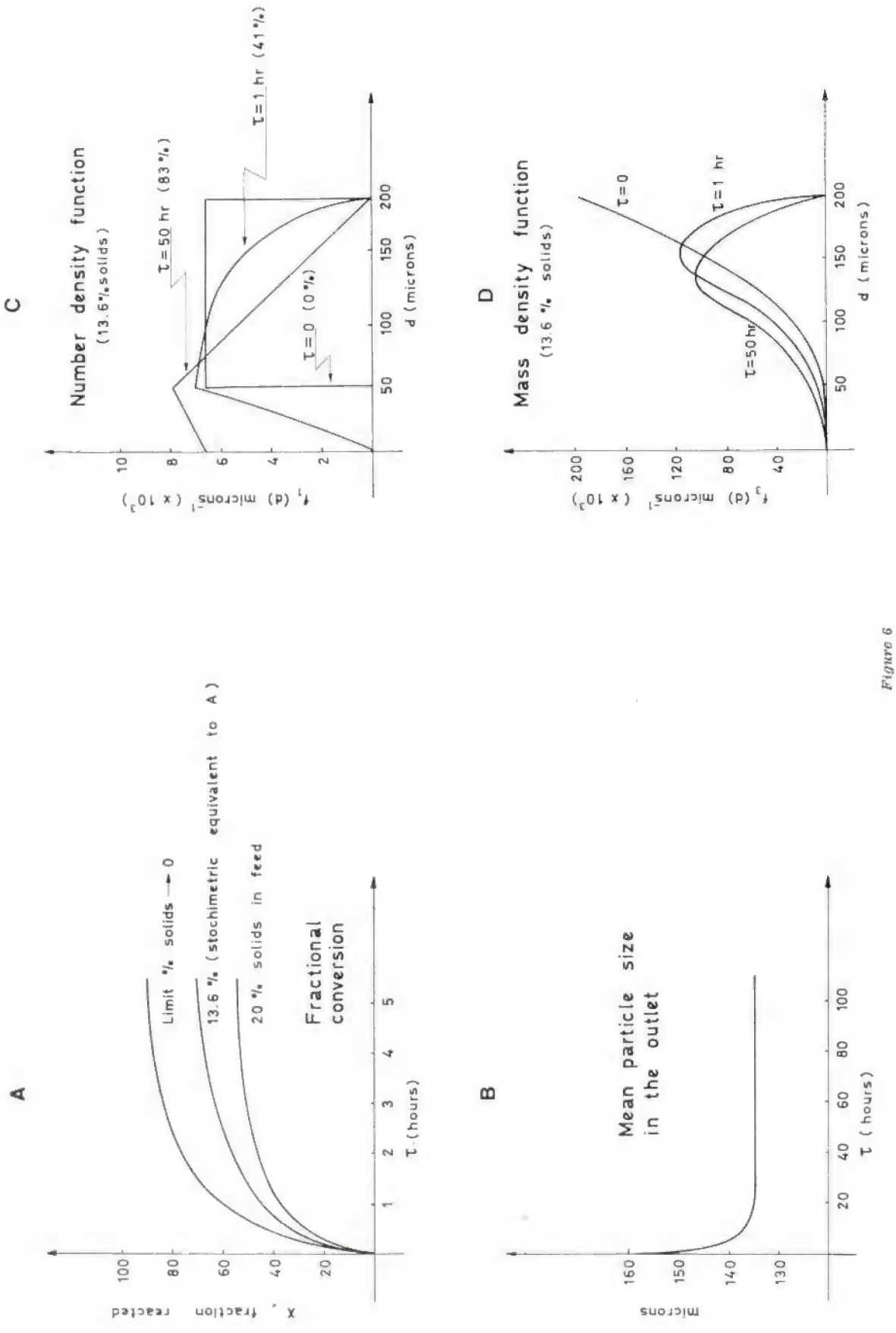

A
Limit % solids → 0
13.6 % (stochimetric equivalent to A)
20 % solids in feed
Fractional conversion
X, fraction reacted
τ (hours)
B
Mean particle size in the outlet
microns
τ (hours)
C
Number density function
(13.6%solids)
τ=50 hr (83 %)
τ=1 hr (41 %)
τ=0 (0 %)
d (microns)
D
Mass density function
(13.6 % solids)
τ=0
τ=1 hr
τ=50 hr
d (microns)

Figure 6

$\rho_C = 2.33 \times 10^{-2}$ moles/cc

$k_s = 9.32 \times 10^{-2}$ cm/hr

$C_{A\,IN} = o.8$ molar

τ : variable

The values of ρ_C and k_s correspond to those of chrysacolla, CuO. SiO_2. $2H_2O$. The lixiviant concentration, species A being H_2SO_4, corresponds to a pH approximately 0.10.
(activity coefficient of 1). For stoichiometric solids and acid $n_I \simeq 24{,}700$ particles/cc. The quantity n_I is calculated from a mass balance:

$$M_T = \int_{d_{min}}^{d_{max}} \rho_C \frac{\tau}{6} d^3 \overline{n}_I f_I(d) d(d) \qquad 88$$

where M_T = total mass/cc of solids in feed. Since M_T is known, i.e. $M_T = 8 \times 10^{-4}$ moles/cc chrysacolla, and in the feed:

$$f_I(d) = 1/(d_{max} - d_{min}) \qquad 89$$

$$\overline{n}_I = 6M_T/\pi \rho_c \int_{d_{min}}^{d_{max}} d^3 f_I(d) d(d) \qquad 90$$

The graphs of Figure 6 show how the model can be used to generate detailed information about the leaching of the mineral. In plot A the fraction leached is shown vs τ and % solids (in the feed). This latter quantity is specified by moles of solid used per cc of solution, which in the stoichiometric case corresponds to 8×10^{-4}moles/cc acid. Both the number and mass size distributions in the outlet of the vessel are plotted in C and D as a function of τ, which is equivalent to flow rate (vol/time) if the volume of the vessel is kept constant. The average particle size in the outlet is also show in B. It is apparent that after about 50 to 60 hours, the system is very close to a state of equilibrium in which the particles are remaining fixed in size; that is, not much leading is going on because the driving force of concentration gradient has considerably diminished. The lefthand-side of equation 86 can be solved (iteratively) to establish $C_{A'}$ out as a function of τ to be plotted. (Due to lack of time this has not been done, but is not difficult to accomplish). It is also interesting to note that a high % solids is not a good idea, at least for one perfect mixer, since the fractional conversion would have a practical limit of about 50 % in the case of 20 % solids.

With reference to experimental verification of these continuous leaching models for concentrates, it appears that not much detailed experimental work has been reported for analysis. In this case the theory has proceded the experiment. However, due to a national interest in optimum processing of copper sulfide concentrates in the USA, experimental programs are underway at several western universities to test the models. Preliminary results are encouraging; and since the models involve very few approximations that are unrealistic, it is expected that these considerations will lead to maximum utilization of natural resources.

REFERENCES

[1] **Herbst, J. A.**, unpublished manuscrit.

[2] **Herbst, J. A., Mika, T. S., Rajamani, K.**, «A Comparison of Distributed. and Lumped Parameter Models for Open Circuit Grinding».

[3] **Herbst, J. A., Kim, J. H.**, «Nearly Equal Selection Functions in Linear Size-Discretized Grinding Models», Trans. I. M. M., C/69-73 **(1973)**.

[4] **Herbst, J. A., Mika, T. S.**, «Mathematical Simulation of Tumbling Mill Grinding: An Improved Method», Proc. IX Int. Min. Proc. Gong., Ustav Pro Viyzkum Rud, Prague, Pt. III, 27-37 **(1970)**.

[5] **Herbst, J. A., Fuerstenau, D. W.**, «The Zero Order Production of Fine Sizes in Comminution and Its Implications in Simulation», Trans. A. I. M. E., **241**, 538-48 **(1968)**.

[6] **Herbst, J. A., Mika, T. S.**, «Linearization of Tumbling Mill Models Involving Nonlinear Breakage Phenomena», XI Sym. Com. App. Min. Ind., E 78-124 **(1973)**

[7] **Herbst, J. A.**, «Batch Ball Mill Simulation: An Approach for Wet Syistems», D. Eng. Dissertation, Univ. California, Berkeley, USA **(1971)**.

[8] **Grandy, G. A., Fuerstenau, D. W.**, «Simulation of Nonlinear Grinding Systems: Rod Mill Grinding», Trans. A. I. M. E., **247**, 348-54 **(1970)**.

[9] **Mika, T. S.**, «Application of a Distributed Parameter Model for a Continuous Grinding Mill at Steady State», Trans. I. M. N., C239-49 **(1975)**.

[10] **King, R. P.**, «Simulation of Flotation Plants», Trans. A. I. M. E., **258**, 286-93 **(1975)**.

Completado o navio Kaimei, gerador de energia a partir das ondas do mar

Está a progredir no Japão a pesquisa sobre a produção de electricidade pelas ondas do mar. Os testes mundiais de primeira escala sobre produção de energia pelas ondas do mar para aplicação prática começaram em 8 de Julho, no Porto de Yura, Prefeitura de Yamagata, a bordo do navio experimental Kaimei, que é o culminar de pesquisas iniciadas em 1974 pela Agência de Ciência e Tecnologia e pelo Centro de Ciência Marítima e Tecnologia do Japão.

A geração de energia das ondas, também chamada geração de energia absorvente das ondas, tem o efeito de acalmar as ondas do mar ao mesmo tempo que aproveita a sua energia para a piscicultura que é levada a cabo intensamente nas águas costeiras do Japão.

As ondas altas são reduzidas durante a geração de electricidade através da absorção de energia das ondas. Assim, espera-se que a geração de energia das ondas sirva o duplo objectivo de gerar electricidade e possibilitar que as águas costeiras sejam usadas efectivamente através do seu efeito calmante.

Basicamente, o equipamento de geração de energia das ondas conta com a acção das ondas para empurrar o ar para dentro e para fora das muitas câmaras de ar colocadas a todo o comprimento de um longo corpo flutuante. A corrente de ar atinge uma alta velocidade depois de ser forçada a passar atravé de bocais e põe em movimento turbinas de ar e geradores para produzir electricidade. Ao mesmo tempo, a força das ondas enfraquece.

Um modelo experimental com 7,5 m de comprimento e 1,2 m de largura colocado num tanque de água conseguiu absorver cerca de 80 % da energia das ondas como energia de ar, reduzindo a altura de grandes ondas em cerca de 2/3.

O equipamento gerador do navio experimental agora completado, Kaimei, destina-se a gerar 200 kw de electricidade. As pesquisas sobre o gerador começaram em 1974, e têm sido feitas várias inovações para aumentar a eficiência geradora. Já foi investido no projecto um total de 500 milhões de ienes (cerca de 2,5 milhões de dólares), com outros 300 milhões de ienes orçamentados para o corrente ano fiscal.

O Kaimei, que se assemelha a um navio-tanque, tem 80 m de comprimento e 12 m de largura e pesa 500 toneladas. O casco contém 11 pares de câmaras de ar com um gerador instalado por cima do ponto médio de cada par. A água do mar move-se para cima e para baixo nas câmaras sem fundo, de acordo com a acção das ondas. Quando uma onda se levanta, o ar é empurrado para dentro de uma das duas câmaras, e quando a onda cai, o ar é sugado para a outra câmara. A repetição deste processo mantém o movimento giratório da turbina de ar.

No corrente ano fiscal, serão conduzidas experiências com 3 geradores instalados, respectivamente, na proa, na popa e a meia-nau. Sob um acordo internacional, será realizado no próximo ano fiscal um estudo comparativo, com geradores desenvolvidos pela Grã-Bretanha e Estados Unidos, a serem instalados a bordo do Kaimei.

Eventualmente equipado com 11 geradores, o Kaimei será capaz de gerar cerca de 2000 kw de electricidade.

O uso da energia das ondas é um dos temas de pesquisa da Agência Internacional de Energia (AIE). Além do Japão, participam também neste projecto os Estados Unidos, Suécia, Canadá, Peru, Holanda, Dinamarca, Bélgica e Irlanda.

O sistema de turbina de ar do Japão e o método Salter Cam da Grã-Bretanha são considerados altamente promissores na geração de energia a partir das ondas. Por isso, são colocadas grandes esperanças na experiência a grande escala do Japão como uma grande contribuição no campo da utilização da energia das ondas.

Uma vez postos em uso prático, os geradores de energia das ondas servirão como uma fonte de energia para as principais ilhas, assim como para as mais afastadas. O seu efeito redutor ds ondas ajudará também a proteger a pesca costeira e a cultura de peixes, evitar desastres naturais na beira-mar e conservar as obras de engenharia civil ao longo da costa.

Particularmente digno de nota é o plano para fazer uso das ondas de inverno do Mar do Japão e usar a energia gerada pelas ondas para fazer funcionar o equipamento de derreter neves nas regiões de grandes nevões ao norte de Honshu.

Várias experiências a bordo do Kaimei continuarão até 1980, e se elas provarem, a geração de energia a partir das ondas será posta em prática em 1981.

Para o Japão, um país insular com 13 000 km de linha de costa, as ondas constituem a mais abundante fonte de energia ainda por ser utilizada. Em breve, o Japão será capaz de gerar 1,4 biliões de kw de electricidade por ano, a partir do mar que o rodeia.

(Extraído do «Boletim Informativo da Embaixada do Japão», (399) Dezembro 1978).

NÚMERO 451/452 JANEIRO/FEVEREIRO/MARÇO 1979 ANO LIV VOLUME XL

C. D. U. 519.24/25/27/28:622:550

Le parametrage des reserves

D. GUIBAL *

RESUMO

Distinguem-se dois aspectos da parametrização prática das reservas de um jazigo — a parametrização técnica, em que se pretende obter o valor do teor de corte que maximiza a quantidade de metal para uma tonelagem fixada e uma optimização económica.

Desenvolve-se a parametrização técnica tratando o caso da selecção livre e o caso da selecção sob constrangimentos geométricos que podem referir-se a jazigos estratiformes e a desmontes a céu aberto.

ABSTRACT

Two features of the pratical ore reserve parametrization of an orebody are developed — the thechnical parametrization, in which the aim is to calculate the cut off grade that maximizes the metal content for a fixed tonnage and the economical optimization.

The technical parametrizaton is emphasized in two cases — the free selection and the selection under geometric constraints in stratigraphic deposits or open pit operations.

Le présent texte est une synthèse de la note N-453 de G. MATHERON publiée au Centre de Morphologie Mathématique de l'ECOLE DES MINES DE PARIS em Décembre 1975.

I — INTRODUCTION

L'objectif théorique — et idéal — du paramétrage des réserves d'un gisement serait de déterminer, en fonction des divers paramètres qui interviennent dans la formule de valorisation (cours des métaux, coûts divers...) la meilleure exploitation techniquement possible.

Formellement, $\forall\ b=(b_1, \ldots b_n)$ la valeur des paramètres économiques, il existe un ou plusieurs projects $\bar{\omega}(b)$ qui maximisent la formule de valorisation $B(\bar{\omega}, b)$ à b fixé. On note $\gamma(b)$ le maximum.

$$\gamma(b) = B(\bar{\omega}(b), b) = \mathrm{Sup}_{\bar{\omega}} B(\bar{\omega}, b)$$

Si le projet $\bar{\omega}$ présente les caractéristiques techniques X_i (teneur de coupure, taux de découverture, tonnage minerai...), on a le paramétrage:

$$f_i(b) = X_i(\bar{\omega}(b)) \text{ avec } \gamma(b) = \mathrm{Sup}_{\bar{\omega}} B(\bar{\omega}, b).$$

Malheureusement, dans la pratique, il est impossible de formuler le problème de cette manière, pour 2 raisons:

— Le gisement n'est pas connu, mais seulement estimé.

— Il est impensable de pouvoir optimiser à la fois toutes les opérations très complexes qui constituent l'exploitation d'un gisement.

L'idée essentielle qui nous guidera donc dans le paramétrage «pratique» des réserves sera de séparer le problème en phases à peu près indépendantes, et de chercher, à chaque fois, des méthodes de simplification. A titre d'exemple, déjà ancien, citons la très connue relation tonnage-teneur de Lasky: à partir d'un modèle très simple d'un porphyri-copper (teneur régulièrement décroissante depuis un coeur riche), Lasky a cherché à étudier la variation des réserves récupérables en fonction de la teneur de coupure z_0.

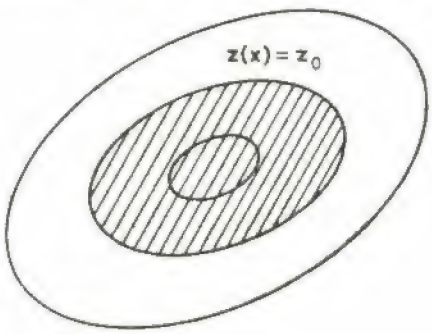


Fig. 1

Le domaine exploité est celui limité par l'isoteneur z_0:

$$B_{z_0} = \{x \mid z(x) \geqslant z_0\}$$

Son tonnage et sa quantité de métal contenue sont respectivement:

* Centre de Geostatistique de l'École Sup de Mines de Paris (Fontainebleau).

$$T(z_o) = \int_{B_{z_o}} dx \quad \text{et} \quad Q(z_o) = \int_{B_{z_o}} Z(x)dx$$

D'où la teneur: $m(z_o) = \dfrac{Q\ (z_o)}{T\ (z_o)}$

Par élimination de z_o, on trouve une relation entre Q et T et m et T. Cette dernière peut, dans certaines limites, prendre la forme bien connue $m = \alpha - \beta$ Log T (loi de Lasky).

En termes d'histogrammes F(dz) des teneurs ponctuelles, Lasky utilisait la relation:

$T(dz) = T_o F(dz)$ où T_o représente le tonnage maximal possible — On en déduit les relations tonnage--teneur:

$$T(z_o) = T_o\left(1 - F(z_o)\right)$$

$$Q(z_o) = T_o \int_{z_o}^{\infty} zF(dz)$$

Cet exemple — classique — de paramétrage peut être critiqué d'un point de vue géostatistique (l'histogramme des teneurs correspond à des carottes, non à des blocs; les teneurs vraies des blocs ne sont pas connues, mais estimées et, enfin, il existe des contraintes géométriques sur la sélection qui font qu'on ne peut pas enlever un bloc indépendamment d'un autre). Il est cependant très instructif, car il introduit l'idée simple d'un paramétrage en fonction d'un seul paramètre technique (la teneur de coupure z_o). Même si les paramètres économiques de la formule de valorisation sont très nombreux, le meilleur choix possible du volume à exploiter en vue d'obtenir un tonnage T donné est celui qui maximise la quantité de métal Q à T fixé.

On peut donc scinder le problème de l'optimisation en 2 parties:

- *Un paramétrage technique:* en fonction du paramètre technique z_o, on détermine le projet qui maximise Q à $T(z_o)$ fixé.
- *une optimisation économique:* on choisit ensuite z_o de manière à optimiser la formule de valorisation.

C'est cette démarche — double — que l'on tentera de généraliser.

II — LES FACTEURS DU PARAMETRAGE TECNIQUE :

Ils sont assez nombreux.

a) Les caractéristiques technologiques de l'exploitation:

Elles peuvent imposer des contraintes qui limitent le nombre de projets possibles à des *contours autorisés*. Par exemple, dans une exploitation à ciel ouvert, il faut respecter la pente des talus: autrement dit, pour pouvoir exploiter un bloc x, il faut avoir exploité auparavant tous les blocs contenus dans le cone de sommet x et de pente celle du talus.

b) La sélection :

Celle-ci peut être simple ou double. Dans ce dernier cas, on distinguera une sélection *d'extraction* (choix du volume V à extraire) et une sélection du *minerai* (les petits blocs v inclus dans V sont envoyés, soit au stérile, soit à l'usine de traitement).

A chaque niveau de sélection, il convient de préciser le *support* (taille des blocs), et les *contraintes géométriques* à laquelle elle est soumise.

c) Le niveau d'information disponible :

Il convient de distinguer soigneusement l'information *actuelle*, disponible au moment de l'étude et l'information *future*, disponible au moment de la sélection effective, qui est souvent différente de la première et qu'il faudra anticiper en probabilité.

d) Les critères de sélection :

Ils sont de la forme:

f_i (information au moment de la décision de selection S_i) $\geqslant z_i$ où z_i représente un *paramètre*.

Les fonctions critiques f_i doivent être telles que l'optimum économique figure dans la famille de projets définis par les f_i.

Pratiquement, on prend souvent, pour f_i les estimateurs Z_v^* formés avec l'information future disponible et les z_i sont alors des teneurs de coupure.

e) La formule de valorisation B

Elle dépend des paramètres économiques et des caractéristiques du gisement. Souvent B sera une fonction de Q_i (quantité de métal), T_i (tonnage minerai sélectionné) et V_i (tonnage total extrait), croissante en Q_i, décroissante en T_i et V_i.

Un cas particulièrement simple est celui où B est linéaire:

$$B = aQ - \lambda V - \theta T$$

III — SÉLECTION LIBRE

a) Sélection libre et simple

Dans ce cas, le gisement est découpé en blocs égaux v_i de volume v, qu'on peut sélectionner indépendamment; il s'agit de maximiser la quantité de métal $Q = v \sum_K Z(v_i)$, à tonnage (donc k) fixé, et quelle que soit la formule de valorisation B.

$Z(v_i)$ n'est pas connu: on utilise un estimateur $Z^*(v_i)$. On impose à cet estimateur la condition de *non biais conditionnel:*

$$E\left[Z(v_i) \mid Z^*(v_i) \right] = Z^*(v_i).$$ (condition un peu plus forte que la condition classique de non biais du krigeage, mais on peut admettre que l'estimateur

de krigeage n'est pas trop mauvais de ce point de vue).

On montre que $\forall B$, il faut utiliser comme critère de sélection $Z^*(v_i) \geqslant z$ où z, paramètre technique, est une teneur de coupure appliquée à l'estimateur *futur*. Au stade de l'étude, $Z^*(v_i)$ est inconnu; on devrait donc calculer pour chaque v_i, la quantité $P(Z^*(v_i) \geqslant z \mid Z_a)$ (Z_a: information actuellement disponible) et estimer le tonnage total T(z) par $T^*(z) = v \sum P(Z^*(v_i) \geqslant z \mid Z_a)$.

En fait, cette procédure peut être simplifiée s'il y a un nombre suffisant de v_i: la sommation redonne approximativement la probabilité non conditionnelle:

$$T(z) = Nv\, P(Z^*(v) \geqslant z)$$

Pour effectuer ce calcul, il suffit de connaitre la loi a priori de l'estimateur futur $F^*(dz)$.

D'où le paramétrage cherché (en posant $T_o = Nv$)

$$T(z_o) = T_o \int_z^{\infty} F^*(dz)$$

$$Q(z_o) = T_o \int_z^{\infty} z\, F^*(dz)$$

F^*, en général inconnu, peut s'obtenir à partir de l'histogramme des Z_a moyennant des hypothèses de permanence.

L'optimisation économique consiste ensuite en la recherche de z_o, valeur de z qui maximise B.

Dans le cas très simple où B est linéaire en $Z(v_i)$

$$B(Z(v_i)) = V(a\, Z(v_i) - b)$$

$$\begin{cases} a = \text{valeur du point métal connu} \\ b = \text{frais d'exploitation} \end{cases}$$

on obtient facilement:

$z_o = \dfrac{b}{a}$ (c'est la classique règle marginaliste: on exploite tout bloc qui paie ses frais en aval).

b) **Sélection libre à 2 niveaux**

On suppose à présent 2 sélections successives:

— une sélection S_1 *d'extraction* sur la base d'une information I_1 (pas nécessairement disponible au moment de l'étude) permet de choisir les grands panneaux V_j

— une sélection S_2 *du minerai* sur la base d'une information I_2 plus riche qu'I_1 permet de choisir dans chacun des V_j précédemment sélectionné les blocs v_{ij} à envoyer au traitement.

1) **Cas où I_1 est disponible**

Au niveau de chaque panneau V_j de première sélction, on réalise le même paramétrage qu'en *a*); d'où l'estimation *(locale)*:

$$T_j(z_o) = V_j \int_{z_o}^{\infty} F_j^*(dz \mid I_1)$$

$$Q_j(z_o) = V_j \int_{z_o}^{\infty} z\, F_j^*(dz \mid I_1)$$

Ces *fonctions de transfert* des panneaux peuvent être estimées à l'aide du krigeage disjonctif.

Il faut optimiser à présent la sélection S_1 (choix des V_j); dans le cas simple où la formule de valorisation est linéaire:

$$B = aQ - bT - cV$$

V: volume extrait — b: prix de revient du traitement
T: tonnage traité — c: coût d'extraction
Q: métal contenu — a: valeur du point métal

On montre qu'il y a 2 *paramètres techniques* (teneurs de coupure):

$z_o = \dfrac{b}{a}$ valeur optimale de z à V_j fixé (car cV est déjà dépensé)

$z_1 = \dfrac{c}{a}$

Le critère de sélection des panneaux V_j est donc:

$$Q_j(z_o) \geq z_o T_j(z_o) + \frac{c}{a} V_j$$

$$\int_{z_o}^{\infty} \left[1 - F_j^*(z \mid I_1)\right] \geq \frac{c}{a} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow E\left[(Z^*(V_j) - z_o)_+ \mid I_1\right] \geq Z_1$$

On effectue donc S_1, pour z_o et z_1, selon ce critère; soit $J(z_o, z_1)$ l'ensemble des indices j retenus, on a alors:

$$T(z_o, z_1) = \sum_{j \in J} T_j(z_o)$$

$$Q(z_o, z_1) = \sum_{j \in J} Q_j(z_o)$$

$$V(z_o, z_1) = \sum_{j \in J} V_j(z_o)$$

Quand B n'est pas linéaire, les formules sont plus complexes, et on ne peut séparer le paramétrage technique et l'optimisation économique.

2) **Cas où I_1 n'est pas disponible**

Ce cas est nettement plus difficile: il faut anticiper en probabilité les fonctions de transfert, ce qui conduit à l'utilisation du krigeage disjonctif.

IV — SÉLECTION SOUS CONTRAINTE

Nous nous limiterons au cas de la sélection simple. Un formalisme semblable, quoiqu'un peu plus lourd, peut être développé pour une sélection double (paramétrage en V et T).

La contrainte s'exprime par le fait que tout projet doit appartenir à une famille de *contours autorisés*.

Ex.: *ciel ouvert:* un contour autorisé A doit respecter les pentes d'équilibre (talus), donc $A = \bigcup_x \Gamma_x$ où Γ_x est le cône de sommet x et de pentes les pentes d'équilibre.

Gisement stratiforme (toit et mur de teneur): dans chaque panneau P_j, la partie exploitée est une tranche horizontale de puissance $\geqslant p$ donnée.

Parmi tous les projets A, tels que $V(A) \leqslant v$, le meilleur est celui qui maximise la quantité métal Q(A)

$$\forall v, \exists A_v \mid Q(v) = \text{Sup} \{ Q(A) \mid A \in \mathcal{B} \text{ et } V(A) < v \}$$

Si on suppose l'information I qui sert au choix de A disponible, alors il revient au même de travailler en teneurs vraies ou teneurs estimées (vérifiant le non biais conditionnel): il faut en effet maximiser

$$Q^*(A) = \int_A q^*(x)dx$$

Malheureusement, cette maximisation n'est pas très facile et fait appel à une combinatoire très développée. C'est pourquoi s'est développée la technique de *l'analyse convexe* qui cherche à remplacer la courbe Q(v) par son enveloppe concave.

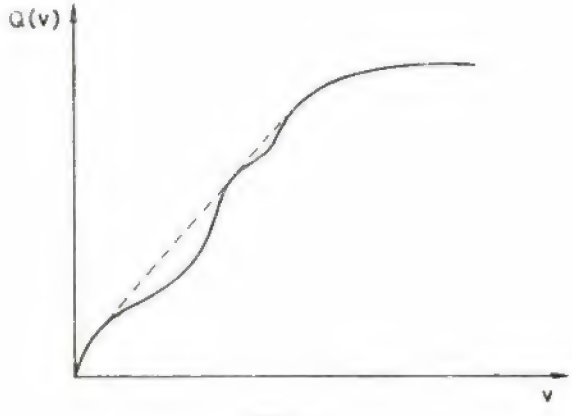


Fig. 2

Posons $\forall \lambda \geqslant 0$

$$\gamma(\lambda) = \underset{A}{\text{Sup}} \{Q(A) - \lambda V(A)\}$$

Soit $\mathcal{B}_\lambda$ la famille des $A \in \mathcal{B}$ qui réalise ce sup; soient enfin A_λ^- et A_λ^+ les éléments de $\mathcal{B}_\lambda$ qui minimisent et maximisent V(A).

Pour $V(A) \leqslant v$, on a: $Q(A) - \lambda v \leqslant \gamma(\lambda)$
et $Q(v) - \lambda v \leqslant \gamma(\lambda)$
avec égalité seulement si $v = V(A_\lambda)$ pour $A_\lambda \in \mathcal{B}_\lambda$

Donc $\gamma(\lambda) = \underset{v \geqslant 0}{\text{Sup}} \{Q(v) - \lambda v\}$

Si on pose

$$\hat{Q}(v) = \underset{\lambda \geqslant 0}{\text{Inf}} (\gamma(\lambda) + \lambda v)$$

on obtient l'enveloppe concave de Q(v), comme il est facile de la vérifier.

On en déduit le paramétrage des réserves en λ:

$\forall \lambda \geqslant 0$, la droite $q - \lambda v = \gamma(\lambda)$ admet deux points d'appui extrêmes:

$(V_\lambda^-, Q_\lambda^-)$ et $(V_\lambda^+, Q_\lambda^+)$ associés à A_λ^- et A_λ^+, Le paramétrage est:

$$V^-(\lambda) = V(A_\lambda^-) \qquad V^+(\lambda) = V(A_\lambda^+)$$

$$Q^-(\lambda) = Q(A_\lambda^-) \qquad Q^+(\lambda) = Q(A_\lambda^+)$$

dont on démontre qu'il est unique

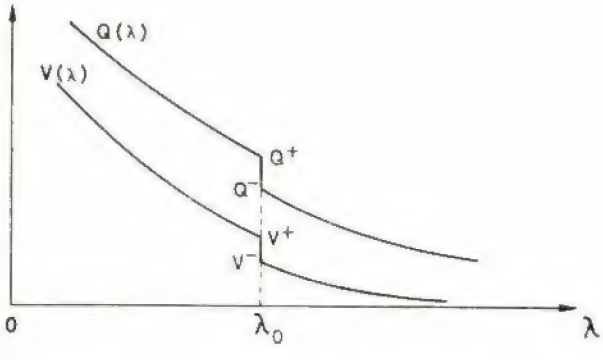


Fig. 3

Donnons deux exemples:

a) **Toit et mur de teneur**

Il s'agit de déterminer pour un gisement stratiforme les cotes a_i et b_i du toit et du mur en chaque panneau P_i, connaissant le krigeage des tranches horizontales de coté x $Z_i^*(x)$

$$Q - \lambda V = \sum_i \int_{a_i}^{b_i} (z_i^*(x) - \lambda)\, dx$$

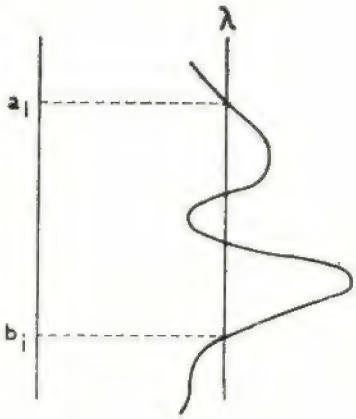


Fig. 4

On optimise chacun des panneaux séparément: on obtient: ($Z^*_i(x) < \lambda$ dès que x est au-dessus de a_i ou en dessous de b_i)

$$T_i(\lambda) = (b_i - a_i)$$

$$Q_i(\lambda) = \int_{a_i}^{b_i} Z_i^*(x)\,dx$$

$$\text{et } T(\lambda) = \sum T_i(\lambda)$$

$$Q(\lambda) = \sum Q_i(\lambda)$$

Une application très détaillée de cette méthode à un gisement de phosphates figure dans [1].

b) **Ciel ouvert**

On a vu que les contraintes de pente s'expriment par le fait que dès que l'on veut extraire un bloc x, il faut extraire tout le cone Γ_x. On a la relation d'ordre $y \geqslant x$ si $y \in \Gamma_x$.

La famille $\mathcal{B}$ des contours autorisés est constituée des ensembles stables pour Γ.

On considère d'autre part l'ensemble $\mathcal{J}$ des fonctions Γ croissantes

$$f \in \mathcal{J} \Longleftrightarrow \{ y \in \Gamma_x \Longrightarrow f(y) > f(x) \}$$

On recherche les contours qui réalisent le sup $\{Q - \lambda V\} = \gamma(\lambda)$.

Soit $\mathcal{B}_\lambda$ la famille de ces contours, B^-_λ et B^+_λ le plus petit et le plus grand élément, on associe alors à chaque bloc x, une fonction Λ définie de manière unique par:

$$\Lambda(x) = \text{Sup } \{\lambda \mid x \in \mathcal{B}^+_\lambda\}$$

Il est facile de voir que $\Lambda \in \mathcal{J}$

et que: $B^+_\lambda = \{\Lambda \geqslant \lambda\}$ $\qquad B^-_\lambda = \{\Lambda > \lambda\}$

On montre alors que Λ *représente la projection* de *la teneur q(x) sur* $\mathcal{J}$ et définit complètement le paramétrage des réserves par:

$$B^+_\lambda = \{\Lambda \geq \lambda\} \qquad B^-_\lambda = \{\Lambda > \lambda\}$$

$$V^+_\lambda = \int_{\Lambda \geq \lambda} V(dx) \qquad V^-_\lambda = \int_{\Lambda > \lambda} V(dx)$$

$$Q^+_\lambda = \int_{\Lambda \geq \lambda} \Lambda(x) V(dx) \qquad Q^-_\lambda = \int_{\Lambda > \lambda} \Lambda(x) V(dx)$$

Une application importante de ce paramétrage est l'élaboration d'un *programme automatique* de dessin de carrière original pour lequel on pourra consulter [2].

REFERENCES

[1] **A. Journel et H. Sans** — Ore grade control in a subhorizontal deposit (in transactions of the Institution of mining and metallurgy, London — Bulletin 812, July 1974, pp. A 79-A84).

[2] **D. François-Bongarçon** — Note relative au programme d'optimisation de la carrière finale (Note interne du C. M. M. n.° N.451 de Novembre 1975).

Encontros sobre métodos quantitativos aplicados às variáveis regionalizadas

O Centro de Valorização de Recursos Minerais da Universidade Técnica de Lisboa pretende reunir, na 2.ª quinzena de Outubro do presente ano, um conjunto de investigadores interessados pela aplicação de metodologias (teoria das funções aleatórias; processos estocásticos e estatísticas multivariantes) no tratamento de variáveis ou índices qualitativos detectáveis em sistemas naturais.

A temática sugerida para estes encontros é a seguinte:

ANÁLISE ESTRUTURAL — Análise de dados (classificação, tipologia, taxonomia numérica, análise factorial de correspondências, etc.). Espectros, covariâncias, variografia, «pattern recognition»;

ESTIMAÇÃO E SIMULAÇÃO — Estimadores lineares e não lineares. Processos não estacionários. Simulação de variáveis correlacionadas;

FILTRAGEM E REGULARIZAÇÃO — Atenuação de variáveis regionalizadas;

DECISÃO E OPTIMIZAÇÃO — Programação dinâmica. Processos markovianos. Econometria;

SISTEMAS — Aplicação da teoria dos sistemas à modelização dos recursos naturais.

Os investigadores interessados em colaborar, deverão comunicar com a maior brevidade as suas críticas e sugestões, bem como o tema e resumo da sua eventual comunicação para:

Comissão organizadora dos encontros. CVRMUTL. IST — Pavilhão de Minas, Av. Rovisco Pais, 1000 Lisboa, Tel. 80 12 10.

NÚMERO 451/452 JANEIRO/FEVEREIRO/MARÇO 1979 ANO LIV VOLUME XL

C. D. U. 519.28:338.5:622

Dynamic programming and its aplication to cut-off grade problems

by PETER DOWD
University of Leeds

RESUMO

A determinação das sequências óptimas de teores de corte e ritmos de produção durante a vida de uma mina é um problema que tem sido particularmente debatido nos últimos 15 anos.

O propósito desta comunicação é o de apresentar o problema no quadro da programação dinâmica: determinística ou estocástica. O primeiro aspecto cobre os casos em que os preços e custos envolvidos podem ser perfeitamente fixados e o último quando estão sujeitos a flutuações aleatórias podendo-se antecipar o seu valor em probabilidade.

ABSTRACT

The determination of optimal sequences of cut-off grades and production rates over the life of a mine is a problem that has received much attention in mining literature, especially during the last 15 years. The aim of this paper is to present the problem as a deterministic ar stochastic program. The former represents the case when future prices and costs can be perfectly predicted, and the later when they are subject to random changes and can be predicted in terms of probabilities.

DYNAMIC PROGRAMMING

Dynamic programming is based on the application of a simple property of multistage decision processes. This property has been formulated by Bellman [1], in his principle of optimality: «An optimal policy has the property that whatever the initial state and initial decision are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decision».

At each of a given set of times a decision is to be chosen from a finite set of decisions. For example, if one of four possible decisions must be chosen at each decision time and the process consists of, say, ten such decision times, there are 4^{10} possible different sequences of ten decisions each. If there is a value associated with each of these decisions we may be interested in finding the decision sequence which has maximum or minimum value. Such a problem can be solved by applying the technique of dynamic programming.

The method is characterised by:

a) A function defining the total value at each decision time of the system.
b) The set of permissible decisions.
c) The present state of the system.
d) The number of steps remaining before the procedure is terminated.

Consider, for example, the simplified situation illustrated in Fig. 1. A small deposit can be mined at either of two cut-off grades: the line of higher slope represents the higher cut-off grade. If the entire operation is carried out at the lower cut-off grade, the deposit will be depleted after six periods, and 600 tons of ore above the cut-off grade will be produced. On the other hand, the deposit will be depleted after two periods, if mining is carried out at the higher grade, and 200 tons will be produced. Between these two extremes several combinations are possible, as shown in Fig. 1. Suppose that 100 tons of ore at the lower grade can be sold at $500, and that the same amount at the higher grade will fetch $1000: with a

discount rate of 20 %, the values of each decision are shown in Fig. 1.

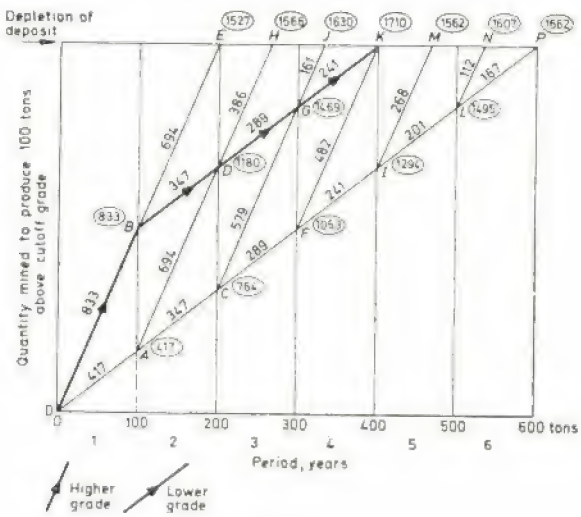


Figure 1
Decision sequence graph

The problem is to find the route of maximal value between the point of departure (0) and the upper horizon, representing depletion of the deposit. There is only one route from 0 to A and one to B. At A we can write the value 417 and at B 833, representing the value of the routes to these points. We must now look for the routes from 0 to C, D and E; but, as a consequence of the principle of optimality, it is only necessary to consider the routes from A and B that have already been assigned values. The route of maximal value from 0 to D is thus OBD, and at D we can write the value 1180. Next we look for the optimal routes from 0 to F, G and H and we need only consider those from C, D and E, and so on.

The optimal route is thus OBDGK, i. e. to mine at the higher cut-off grade during the first period and thereafter at the lower cut-off grade. Production at the higher grade during the second period is traded off against the discounted amounts at the lower grade during the next three periods. It should be understood that this is a very elementary example, but it illustrates the basic concept of dynamic programming.

An expression for this principle of optimisation can be formulated as follows:

Let $$R(x_1, y_1; x_2, y_2; \dots x_n, y_n) = g(x_1, y_1) + g_2(x_2, y_2) + \dots + g_n(x_n, y_n)$$

be the return from producing x_1 tons at a grade y_1 % in period one plus the return from producing x_2 tons at y_2 % in period two, etc. The object is to maximize the return R subject to the constraints

$$x_i \geqslant 0 \text{ and } \sum_{i=1}^{n} x_i = x$$

where x is the total ore reserve. The basic functional equation for this maximization is

$$f_n(x) = \max_{x_n,\, y_n} [g_n(x_n, y_n) + f_{n-1}(x - x_n)]$$

where $f_n(x)$ is the benefit obtained from the optimal policy for n periods. Roman [15] was the first to apply dynamic programming to mining production problems but he limited his study to variable production rates. Noren [13] also used dynamic programming, but assumed constant average grade and constant production rate within defined sub-regions.

ASSUMPTIONS AND LIMITATIONS IN APPLYING DYNAMIC PROGRAMMING TO CUT-OFF GRADE PROBLEMS

It is assumed that the distribution of the grade values will apply uniformly throughout the space in which it is defined so that, for instance, any single ton mined will have exactly the same grade distribution as the entire space.

It should be noted that this is an unrealistic assumption as it implies that any sample regardless of size or position will always have the same mean grade with the same variance. However, if the grades of a volume v are distributed lognormally within a portion V of a deposit then so are the volumes v' (of different size and shape) in the portion V' of the same deposit. But the lognormal parameters, median and variance, take different numerical values as a function of the size and shape of v and V (see «La theorie de DeWijs et la permanence de la lognormalite» in [12]. Thus it is not the permanence of the distribution that is in question only the parameters of that distribution. But so long as we are only concerned with an «average» situation and are not interested in «in situ» blocks of ore the assumption seems valid.

One limitation on dynamic programming solutions is the computer memory and time involved. A cut-off grade problem involving 5,000,000 decisions for example, takes approximately 40 minutes on an IBM 360/ /50. However, problems can quite often be reduced by reducing the range of possible decisions.

It is implicitly assumed that the entire deposit as defined by the grade distribution should be mined out, but only that proportion of material mined that is above the cut-off grade should be sent to the concentrator.

These assumptions are obviously more justifiable in the case of open pit mining than in underground mining. For the latter, however, their effects can be somewhat mitigated in that the deposit can be divided into a number of different distributions through which mining progresses. In addition, variable mining costs can be applied to any specified proportion of the material through which mining is carried out to represent the ratio of the amount of

ore mined to that actually sent to the surface for milling.

To simplify the problem it will be assumed that there is no stockpilling of ore and that, at least on average, all ore mined within any twelvemonth period will also be processed during that period. It is possible, however, to take stockpiling into account with the method.

THE DEPOSIT

As an example, a porphyry copper deposit with a grade distribution shown in Fig. 2 is used. This distribution is that of 100 ft. × 100 ft. × 100 ft. blocks in a 2000 ft. × 2000 ft. (horizontal plan) × 500 ft. (vertical) field. The mean grade of the blocks is 1.19 %. The analysis presented here is further simplified, in that stripping ratios and capital costs will not be considered.

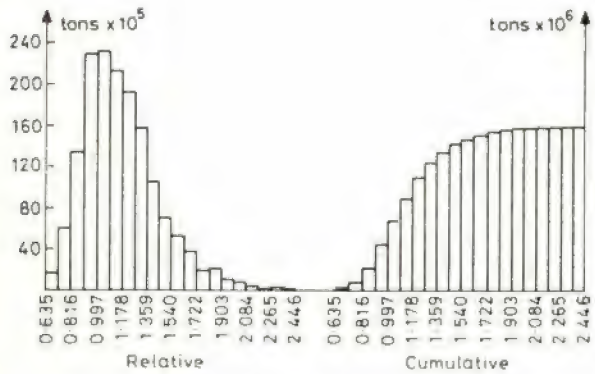


Figure 2

Distribution of blocks in deposit

Concentrator operation: recovery and concentrate grade.

The concentrator has been assumed to have a maximum throughput of 30,000 tons/day. Recovery has been expressed as a function of head grade and concentrate grade in a way felt to be typical of such relationships for porphyry copper deposits. In the example presented here, head grade may vary from 1.19 to 1.50 %, depending on the cut-off grade, and it is assumed that concentrate grade will remain more or less stable at 25 %.

The recovery relationship is expressed as

$$\text{Recovery, } \% = -(h-1.4)^2 \times 29.53 + 92.0 \quad \text{for } h < 1.4\ \%$$

$$= 92.0 \quad \text{for } h \geqslant 1.4\ \%$$

where h is the head grade, and the concentrate grade is assumed to be fixed at 25 %. In fact, any function at all may be specified, including a constant recovery rate. Concentrate grade may also be specified as a function.

In general, the profit function cannot be expressed as a linear function of the tonnage and crude ore cut-off grade but, rather, as a function of the tonnage and the grade of the concentrate yielded by the mill. Thus, the definition of recovery and concentrate grade relationships is very important; these functions will have a significant effect not only on the determination of optimal schedules but also on the sensitivity of optimal solutions to changes in parameters — such as costs and prices.

ECONOMIC CONDITIONS

Perfect competition (i. e. with the company's output too small to affect the market conditions) has been assumed in the examples presented in this paper, although this is not a requirement of the method. Provided that the information is available, prices can be specified as a function of production (output placed on the market). Prices and costs can vary over time, either deterministically as specified values or specified functions of time, or stochastically in terms of probability. By use of these options we can allow the influence of decisions at all future times to be felt in the current decision. Variable or constant taxation schedules can also be specified as part of the input.

EXAMPLE: STABLE MARKET CONDITIONS

The prices, costs and operating conditions used in this example are those specified in Table 1 together with the previously specified recovery function and concentrate grade.

Table 2 shows the optimal schedule when variable mining costs are applied to all excavations (i. e. the amounts shown in the column headed «Depletion rate of deposit»); and Table 3 shows the optimal schedule when these costs are applied only to the actual amount sent to the concentrator (i. e. the amounts shown in the column headed «Production rate»). The former case corresponds more closely to open-pit mining, whereas the latter is closer to underground mining — although the apportioning of variable mining costs in underground mining would normally lie somewhere between the two extremes, and would vary throughout the deposit, depending on the amount of material through which mining must progress to obtain ore above the cut-off grade.

The apportionment of the variable mining costs could also be interpreted in terms of selectivity. The application of variable mining costs to the production rate corresponds to perfect selectivity, whereas the application of these costs to the depletion rate corresponds to a more expensive selectivity in mining.

TABLE 1

Data used in example

Fixed mining cost	$875 000 per year
Variable mining cost	$1.10 per ton
Fixed concentrating cost	$875 000 per year
Variable concentrating cost	$0.725 per ton
Smelter treatment charge	$185 per ton of concentrate
Transportation charge	$10 per ton of concentrate
Gross market price for metal in concentrate	$0.65 per lb
Deductions from market price	$0.05 per lb
Deduction from concentrate grade	1.0 %
Maximum depletion (mining) rate	36 000 tons per day
Minimum tonnage interval for which a decision to mine or not can be made	1500 tons
Maximum daily production (concentrator throughput)	30 000 tons
Interval between cutoff grade decisions	0.025 %
Discount rate	25 %

TABLE 2

Variable mining costs applied to depletion rate of deposit

Year	Depletion rate of deposit, tons/day	Production rate, tons/day	Cutoff grade, %	Discounted profit, $
1	33 000	30 000	0.865	17 940 384
2	33 000	30 000	0.865	14 352 307
3	33 000	30 000	0.865	11 481 846
4	31 500	30 000	0.815	9 155 987
5	31 500	30 000	0.815	7 324 790
6	31 500	30 000	0.815	5 859 832
7	31 500	30 000	0.815	4 687 865
8	31 500	30 000	0 815	3 750 292
9	31 500	30 000	0.815	3 000 234
10	30 000	30 000	0.640	2 364 936
11	30 000	30 000	0.640	1 891 949
12	30 000	30 000	0.640	1 513 559
13	30 000	30 000	0.640	1 210 847
14	30 000	30 000	0.640	968 670
			Total discounted profit	$85 503 506

TABLE 3

Variable mining costs applied to production rate

Year	Depletion rate of deposit, tons/day	Production rate, tons/day	Cutoff grade, %	Discounted profit, $
1	36 000	30 000	0.940	19 711 415
2	36 000	30 000	0.940	15 769 132
3	36 000	30 000	0.940	12 615 306
4	36 000	30 000	0.940	10 092 245
5	36 000	30 000	0.940	8 073 796
6	36 000	30 000	0.940	6 459 037
7	36 000	30 000	0.940	5 167 229
8	36 000	30 000	0.940	4 133 783
9	33 000	30 000	0.865	3 177 474
10	33 000	30 000	0.865	2 541 979
11	31 500	30 000	0.815	1 972 386
12	30 000	30 000	0.640	1 514 042
13—13.8	30 000	30 000	0.640	884 373
			Total discounted profit	$92 112 197

In the schedules of Tables 2 and 3 the cut-off grade is lowered progressively throughout the life of the mine, but at different rates. The cut-off grade is lowered at a slower rate when variable mining costs are applied to the production rate than when they are applied to the depletion rate. The same holds true for the mining or depletion rate.

Within the context of long-term stable market conditions it is now possible to examine the effects of a change in value of any of the specified variables. Since price is generally considered to be the most significant variable, the effects of an increase to $0.75/lb and a decrease to $0.60/lb will be examined.

When variable mining costs are applied to the production rate, the schedules of Table 4 are obtained. The mean cut-off grade is lowered to 0.859 % when the price is increased to $0.75/lb and raised to 0.929 % when the price falls to $0.60/lb. Both cut-off grade and depletion rate become more stable as the price is lowered. On the other hand, when variable mining costs are applied to the depletion rate a rise in price allows the depletion rate to increase; but, to maintain concentrator capacity, the cut-off grade must be raised as shown in the schedules of Table 5.

TABLE 4

Production schedules as a function of metal price: variable mining costs applied to production rate

	Price $0.60/lb			Price $0.75/lb		
Year	Depletion rate of deposit, tons/day	Production rate, tons/day	Cutoff grade, %	Depletion rate of deposit, tons/day	Production rate, tons/day	Cutoff grade, %
1	36 000	30 000	0.940	36 000	30 000	0.940
2	36 000	30 000	0.940	36 000	30 000	0.940
3	36 000	30 000	0.940	36 000	30 000	0.940
4	36 000	30 000	0.940	36 000	30 000	0.940
5	36 000	30 000	0.940	36 000	30 000	0.940
6	36 000	30 000	0.940	36 000	30 000	0.940
7	36 000	30 000	0.940	36 000	30 000	0.940
8	36 000	30 000	0.940	33 000	30 000	0.865
9	36 000	30 000	0.940	33 000	30 000	0.865
10	36 000	30 000	0.940	31 500	30 000	0.815
11	34 500	30 000	0.915	30 000	30 000	0.640
12	33 000	30 000	0.865	30 000	30 000	0.640
13	31.200*	30 000	0.790	30 000†	30 000	0.640
	Discounted profit $47 712 448			Discounted profit $181 161 052		
	Mean cutoff grade 0.929 %			Mean cutoff grade 0.859 %		

* Terminates at 13.3 years † Terminates at 13.9 years

TABLE 5

Production schedules as a function of metal price: variable mining costs applied to depletion rate

Year	Price $0.60/lb			Price $0.75/lb		
	Depletion rate of deposit, tons/day	Production rate, tons/day	Cutoff grade, %	Depletion rate of deposit, tons/day	Production rate, tons/day	Cutoff grade, %
1	31 500	30 000	0.815	33 000	30 000	0.865
2	31 500	30 000	0.815	33 000	30 000	0.865
3	31 500	30 000	0.815	33 000	30 000	0.865
4	31 500	30 000	0.815	33 000	30 000	0.865
5	31 500	30 000	0.815	33 000	30 000	0.865
6	31 500	30 000	0.815	33 000	30 000	0.865
7	30 000	30 000	0.640	31 500	30 000	0.815
8	30 000	30 000	0.640	31 500	30 000	0.815
9	30 000	30 000	0.640	31 500	30 000	0.815
10	30 000	30 000	0.640	30 000	30 000	0.640
11	30 000	30 000	0.640	30 000	30 000	0.640
12	30 000	30 000	0.640	30 000	30 000	0.640
13	30 000	30 000	0.640	30 000	30 000	0.640
14	30 000*	30 000	0.640	30 000†	30 000	0.640
	Discounted profit $41 376 506			Discounted profit $174 281 690		
	Mean cutoff grade 0.721 %			Mean cutoff grade 0.779 %		

* Terminates at 14.3 years † Terminates at 14.9 years

So far it has been assumed that all variables will remain stable over the life of the mine, but it is unrealistic to suppose that costs will not increase and prices will not fluctuate. The interaction of cut-off grades and fluctuating prices will be examined in the following sections.

VARIABLE PRICES WITH A CERTAIN FUTURE

To examine the effect of variable prices (perfectly predicted) on the operating schedule, the actual Canadian producers' prices between 1950 and 1970 have been used. A constant of 41.6 cents has been added to each price in order to begin with a value of 65 cents/lb in the first year. The price variations are shown in Fig. 3. The results of applying these price variations to the previous example are shown in Tables 6 and 7.

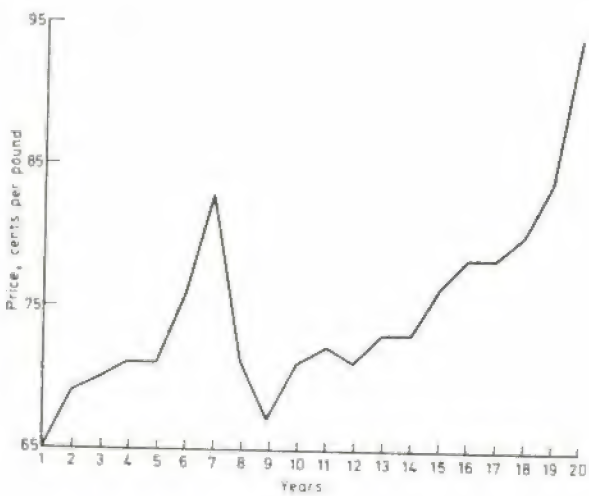


Figure 3
Price variations

Table 6 is the schedule obtained when variable mining costs are applied to the amounts in the rate of depletion column. In this case these tonnages can be regarded as the actual mining rate.

The operation begins in the first year with a mining rate of 31,500 tons/day and a cut-off grade of 0.815 %. It is then increased to 33,000 tons/day at 0.865 % until year 5 when, apparently in anticipation of the sharp price increases of years 6 and 7, the production rate is lowered to 31,500 tons/day. Profit is actually being sacrificed in years 1 and 5 for higher discounted profits in subsequent years.

A more orthodox situation can be seen in Table 7, where variable mining costs have been applied to the production rate. In this case there is no immediate lowering of the cut-off grade with temporary price increases, and the sharp price increases of years 6 and 7 produce no change in the schedule.

TABLE 6

Variable prices: variable mining costs applied to depletion rate

Year	Depletion rate of deposit, tons/day	Production rate, tons/day	Cutoff grade, %	Discounted profit, $
1	31 500	30 000	0.815	17 882 787
2	33 000	30 000	0.865	20 791 590
3	33 000	30 000	0.865	17 591 677
4	33 000	30 000	0.865	15 415 108
5	31 500	30 000	0.815	11 677 888
6	33 000	30 000	0.865	14 140 921
7	33 000	30 000	0.865	13 540 530
8	31 500	30 000	0.815	5 890 082
9	30 000	30 000	0.640	3 571 467
10	30 000	30 000	0.640	3 868 323
11	30 000	30 000	0.640	3 228 508
12	30 000	30 000	0.640	2 408 995
13	30 000	30 000	0.640	2 154 392
14	30 000	30 000	0.640	1 633 490
			Total discounted profit	$133 795 758

TABLE 7

Variable prices: variable mining costs applied to production rate

Year	Depletion rate of deposit, tons/day	Production rate, tons/day	Cutoff grade, %	Discounted profit, $
1	36 000	30 000	0.940	19 711 415
2	36 000	30 000	0.940	22 289 014
3	36 000	30 000	0.940	18 801 613
4	36 000	30 000	0.940	16 399 852
5	36 000	30 000	0.940	12 545 404
6	36 000	30 000	0.940	14 824 670
7	36 000	30 000	0.940	14 115 414
8	33 000	30 000	0.865	6 142 714
9	31 500	30 000	0.815	3 710 247
10	31 500	30 000	0.815	4 000 869
11	30 000	30 000	0.640	3 229 112
12	30 000	30 000	0.640	2 409 478
13	30 000	30 000	0.640	2 154 778
			Total discounted profit	$140 334 579

The analysis is not entirely realistic, as costs have been kept constant, whereas they would normally be expected to follow rising prices. Although dynamic programming is capable of handling simultaneous variation of all costs and prices, only price fluctuations have been considered — to illustrate more clearly the effects of such variations. Perfect predictions of prices would probably only arise from long--term contracts, which would also include amounts to be sold at specified prices. A more realistic analysis would be achieved if future prices were predicted in terms of probability.

STOCHASTIC PROGRAMMING

In most cases prices and costs will vary over time and their prediction will be subject to uncertainty, but if sufficiently accurate estimates are possible, they can be forecast in terms of probability. It is here supposed that all costs and prices can assume any one of a given set of values with certain specified probabilities. Furthermore, it is supposed that at the beginning of any period each price and/or cost can move from one of these permissible values to another. It is not supposed that this change is deterministic; instead, it is assumed to be stochastic, ruled by a transition matrix $P = (p_{ij})$.

A stochastic program for prices can then be formulated as

$$f_n(x) = \max_{x_n, y_n} \sum_{j=1}^{M} g_n(x_n, y_n, j)\ p_j(n) + f_{n-1}(x - x_n)$$

where $p_j(n)$ is the probability of price j in period n and is defined by

$$p_j(n) = \sum_{i=1}^{M} p_i(n-1)\ p_{ij} \quad j = 1, 2, \ldots M$$

and p_{ij} is the probability of a change in price from value i to value j. It is clear that

$$0 \leqslant p_{ij} \leqslant 1 \qquad \forall_{i,j}$$

and

$$\sum_{j=1}^{M} p_{ij} = 1 \qquad \forall_i$$

$f_n(x)$ is the optimal expected value after n periods, and x_n and y_n represent optimal strategies.

Variable prices with an uncertain future.

Suppose, for example, that it is envisaged that the price will vary between \$0.65 and \$1.00/lb during the maximum expected life of the mine-say, 20 years. For the sake of illustration we will also assume that the price can only take certain discrete values between these two limits, as shown in Table 8, where the probability of each price occurring in the first year is also given. From this set of probabilities it can be seen that it is considered almost certain that a price of either \$0.65/lb or \$0.70/lb will prevail in the first year; however, there is also a slim chance that it will be higher. The transition probability matrix of Table 8 represents the probability that the price will move from one value to another in any given period, e.g. the first line represents the probability that if the price in the previous period were \$0.65/lb, in the current period it will remain at that value, or move to \$0.70/lb or to \$0.75/lb, etc.

TABLE 8

Transition probability matrix

Price \$	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
Probability at time 0	0.55	0.15	0.10	0.08	0.06	0.04	0.015	0.005
Transition	0.40	0.40	0.10	0.05	0.03	0.01	0.005	0.005
	0.10	0.30	0.40	0.10	0.05	0.03	0.015	0.005
Probability	0.05	0.10	0.30	0.40	0.10	0.03	0.01	0.01
	0.005	0.05	0.10	0.40	0.30	0.10	0.035	0.01
Matrix	0.005	0.01	0.05	0.10	0.40	0.30	0.10	0.035
	0.005	0.01	0.035	0.05	0.10	0.40	0.30	0.10
	0.005	0.01	0.035	0.05	0.10	0.40	0.30	0.10
	0.001	0.009	0.04	0.05	0.10	0.20	0.40	0.20

The resulting optimal strategy schedule when variable mining costs are applied to the depletion rate is shown in Table 9. When variable mining costs are applied to the production rate, the optimal strategy is that of Table 10. If these results are compared with those of Tables 2 and 3, it will be seen that the overall cut-off grade has been reduced, owing to the expected higher prices. By the fourth year there is a 77 % chance that the price will have risen to $0.75/lb or higher, and in the fifth year this probability has increased to 84 %.

Only variable prices are specified here as a function of time, but all variables may be specified as functional equations as, for example, in reference [11]. Capital and operating costs can also be considered as functions of the cut-off grade. Higher cut-off grades demand more selective mining and, hence, capital and operating costs may increase.

TABLE 9

Variable prices: uncertain future, variable mining costs applied to depletion rate

Year	Depletion rate of deposit, tons/day	Production rate, tons/day	Cutoff grade, %	Discounted expected profit, $
1	33 000	30 000	0.865	58 090 848
2	33 000	30 000	0.865	46 472 678
3	33 000	30 000	0.865	37 178 142
4	33 000	30 000	0.865	29 742 514
5	33 000	30 000	0.865	23 794 011
6	33 000	30 000	0.865	19 035 209
7	31 500	30 000	0.815	15 062 374
8	31 500	30 000	0.815	12 049 899
9	31 500	30 000	0.815	9 639 919
10	30 000	30 000	0.640	7 565 979
11	30 000	30 000	0.640	6 052 784
12	30 000	30 000	0.640	4 842 227
13	30 000	30 000	0.640	3 873 781
14-14.9	30 000	30 000	0.640	2 622 627
		Optimal discounted expected value of profit		$276 022 992

TABLE 10

Variable prices: uncertain future, variable mining costs applied to production rate

Year	Depletion rate of deposit, tons/day	Production rate, tons/day	Cutoff grade, %	Discounted expected profit, $
1	36 000	30 000	0.940	60 267 798
2	36 000	30 000	0.940	48 214 238
3	36 000	30 000	0.940	38 571 391
4	36 000	30 000	0.940	30 857 112
5	36 000	30 000	0.940	24 685 690
6	36 000	30 000	0.940	19 748 552
7	33 000	30 000	0.865	15 464 986
8	33 000	30 000	0.865	12 371 989
9	33 000	30 000	0.865	9 897 591
10	31 500	30 000	0.815	7 764 604
11	31 500	30 000	0.815	6 211 683
12	30 000	30 000	0.640	4 834 797
13	30 000	30 000	0.640	3 867 837
		Optimal discounted expected value of profit		$282 758 267

MINING CONSTRAINTS

Up to this point the problem of determining optimum cut-off grades and production rates has been greatly simplified. In effect, it has been assumed that all ore is immediately accessible. Unfortunately, this is not the case. In open pit mining, for example, the block-grade distribution will comprise all blocks of ore that fall within the optimal pit contours and a block can only be mined if all ore within the cone which has this block at its vertex has already been mined. To fulfill an optimal production plan, as determined by the methods outlined so far, may involve selecting blocks from the bottom of the ultimate pit during the first stages of production which would of course be impossible.

Within the framework of dynamic programming it would be theoretically possible to specify all the constraints on selecting the blocks for every possible year of production but practically this would be impossible because of the enormous number of possibilities. Many simplifications, however, are possible. For example, during each year of production mining could be restricted to a maximum depth of, say, three blocks which would greatly reduce the number of constraints. Such a restriction would probably apply in practice anyway. This maximum yearly mining depth could be increased towards the bottom of the pit.

As an example the distribution of figure 2 has been divided into the five component distribution of figure 4, each of which represents a depth of one block, i. e. a 100 ft. level. Each of these levels is to be mined sequentially beginning with level 1 and no

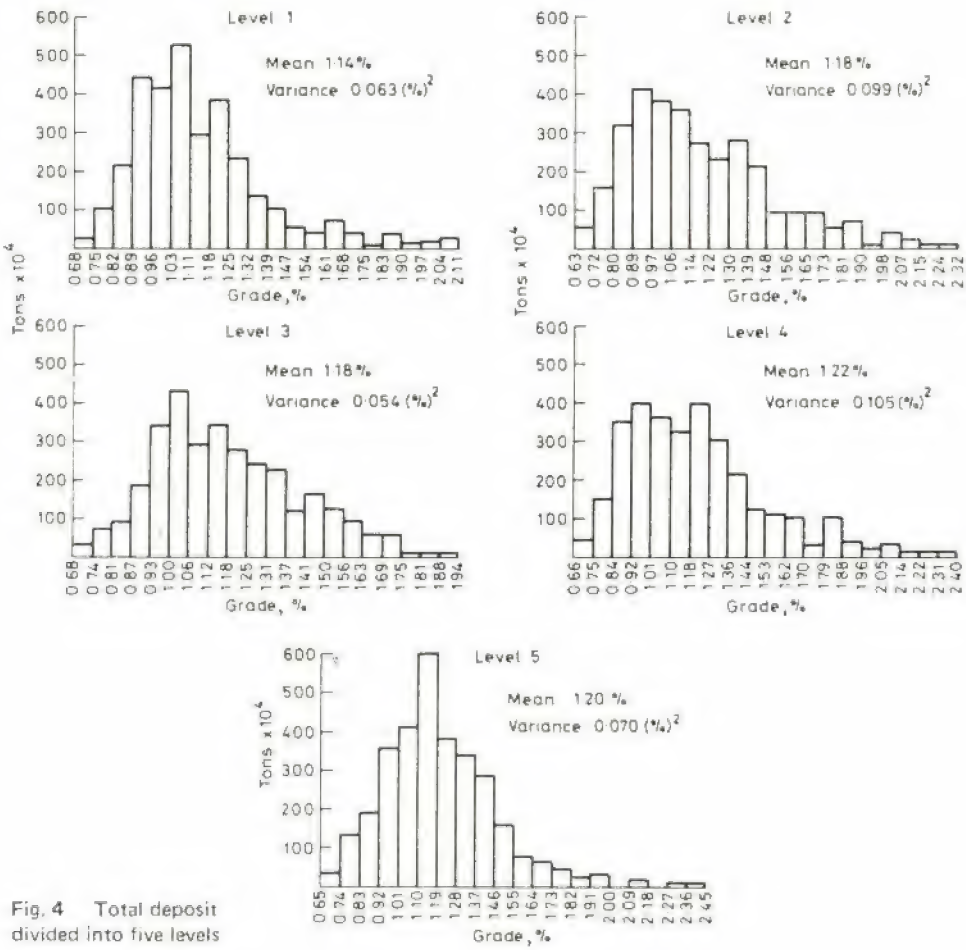


Fig. 4 Total deposit divided into five levels

level can begin production until the level above it has been mined out.

The resulting optimal schedule is shown in Table 11. Variable mining costs have been applied to the production rate, and prices and costs are fixed at the values given in Table 1. All investment is assumed to have taken place before operations begin, and no new investment is required to open a new level. The probable negation of this assumption, in practice, will result in a slightly different schedule especially for the later levels.

Production begins on level 1 at a cut-off grade of 0.930 % and at the maximum depletion rate of 36,000 tons per day. These rates continue until the beginning of the sixth month of the third year (i. e. after 2.4 years — Table 11), when level 2 comes into increased storage and, especially, running time will increase.

TABLE 11

Schedule for sequential mining of the five levels shown in figure 4

Year	Production rate, of deposit, tons/day	Production rate, tons/day	Cutoff grade, %	Discounted profit, $	Level in operation
1	36 000	30 000	0.930	17 991 900	1
2	36 000	30 000	0.930	14 393 520	1
2.4	36 000	30 000	0.930	4 605 926	1
2.4-3	36 000	30 000	0.890	7 692 976	2
4	36 000	30 000	0.890	10 257 302	2
4.9	36 000	30 000	0.890	7 385 256	2
4.9-5	36 000	30 000	0.965	794 193	3
6	36 000	30 000	0.965	6 353 588	3
7	36 000	30 000	0.965	5 082 866	3
7.3	36 000	30 000	0.965	1 219 888	3
7.3-8	36 000	30 000	0.920	3 133 275	4
9	36 000	30 000	0.920	3 580 886	4
9.7	36 000	30 000	0.920	2 005 296	4
9.7-10	31 500	30 000	0.825	761 548	5
11	31 500	30 000	0.825	2 030 794	5
12	30 000	30 000	0.640	1 562 397	5
12.6	30 000	30 000	0.640	749 950	5
			Total discounted profit	$89 601 561	

Further constraints have been introduced such as the combination of two contiguous levels so as to respect open pit constraints. For example a block may be mined from either level 1 or level 2 but if mined from level 2 then the block immediately above it on level 1 plus the eight surrounding blocks on level 1 must have been previously mined (or will at least be simultaneously mined) as shown in figure 5.

Each level is defined by its block-grade distribution. Mining cannot progress to level 3 until level 1 has been completely mined. This problem resulted in a 65 % increase in computing time.

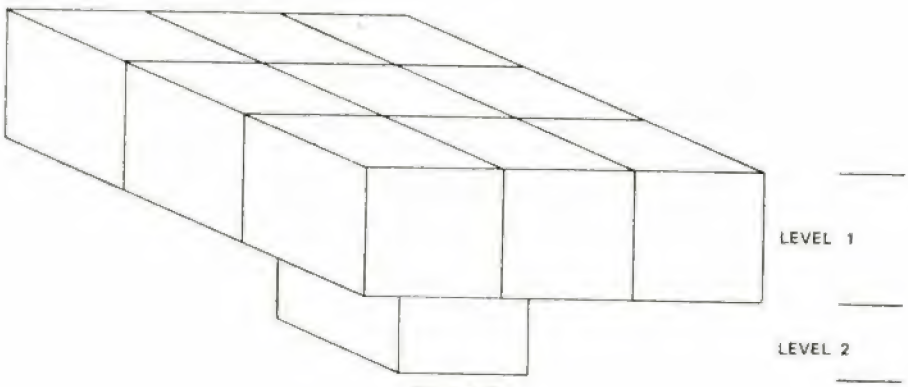


Figure 5

OTHER VARIABLES: TAXATION AND INFLATION

The very nature of the dynamic programming method allows almost any variable to be taken into account. Various types of taxation schedules such as direct levies on profits and high grading penalties have been incorporated into the procedure. Varying inflation rates can also be taken into account.

Dynamic programming not only allows all variables and relationships to be taken into account but also permits the criterion of optimisation (maximum present value, maximum rate of return etc.) to be readily changed.

CONCLUSIONS

Dynamic and stochastic programming are feasible and general methods for solving cut-off grade and production rate problems. While the results presented here are, to a large extent, dependent on the specified operating conditions of the concentrating and refining plants and on the definition of many of the variables, it is a simple matter to alter any parameter either deterministically or stochastically.

The intention in this paper was to introduce a general method for the solution of the cut-off grade problem in particular, and for mining problems in general.

Much work remains to be done before a general theory of cut-off grades under real market conditions can be established; but it is felt that the methods presented can be used to build the foundations of such a theory.

ACKNOWLEDGEMENT

The dynamic programming stage of this work was carried out while the author was a research fellow in the Department of Mineral Engineering at the Ecole Polytechnique, Montreal. During this time the project was supported by funds made available from National Research Council Grant No. 7038 and the Iron Ore Company of Canada through Professor J. Elbrond, who proposed the project. Subsequent development was carried out while the author was engaged as a research fellow in the Department of Mining and Mineral Sciences at the University of Leeds; acknowledgement is made to the Department for computing time.

REFERENCES

[1] **Bellman, R. E.** «Dynamic programming» (Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1957), 342 p.

[2] **Bellman, R. E.** and **Dreyfus, S. E.** «Applied dynamic programming» (Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1962), 363 p.

[3] **Dowd, P. A.** «The determination of optimal production rates and cut-off grades». Tech. Rep. Dep. Génie Minér., Ecole Polytechnique, Montréal EP74-R-37, 1974, 120 p.

[4] **Dowd, P. A.** «The use of dynamic programming in cut-off grade determination». Tech. Rep. Dep. Génie minér., Ecole polytechnique, Montréal EP74-R, 115 p.

[5] **Dowd, P. A.** «Application of dynamic and stochastic programming to optimize cut-off grades and production rates». Transactions Section A, Institution of Mining and Metallurgy, Volume 85, January, 1976.

[6] **Dowd, P. A.** and **David M.** «Planning from estimates: sensitivity of mine production schedules to estimation methods». NATO A. S. I. Advanced Geostatistics in the Mining Industry. (D. Reidel publishing company, Dordrecht, Holland), 1976.

[7] **Elbrond, J.** and **Dowd, P. A.** «The sequence of decisions on cut-off grades and rates of production». 13th APCOM Conference, Technical University, Clausthal. W. Germany, October 1975.

[8] **Henning U.** «Calculation of cut-off grade». Can. Min. J. 84, March 1963, 54-7 p.

[9] **Kaufmann, A.** «Graphs, dynamic programming and finite games». (New York: Academic Press, 1967), 494 p.

[10] **Lane, K. F.** «Choosing the optimum cut-off grade». Colo. Sch. Mines Q., 59, No. 4, 1964, 811-29 p.

[11] **MacKenzie, B. W., Bilodeau, M.** and **Mascall, G. E.** «The effect of uncertainty on the optimisation of mine development parameters». Paper presented at 12th International Symposium on the applications of computers and mathematics in the mineral industry.

[12] **Matheron, G.** «Traité de Geostatistique». Centre de Morphologie Mathématique. Fontainebleau, France.

[13] **Noren, N. E.** «Long range decision models in mining». (Stockholm: Economic Research Institute, 1969), 383 p.

[14] **Overton, T.** «Mineral deposit exploitation: some theoretical developments», Ph. D. thesis, University of Pennsylvania, 1973.

[15] **Roman, R J.** «The use of dynamic programming for determining mine-mill production schedules». In Application of computer methods in the mineral industry (Johannesburg: South African IMM, 1973), 165-70. (Proc. 10th intn. Symp.).

[16] **Taylor, H. K.** «General background theory of cut-off grades». Trans. Instn. Min. Metall. (Sect. A: Min. Industry) 81, 1972, A160-79.

Resumo dos Artigos publicados na «Técnica» n.º 451/452

Ano LIV — Janeiro/Fevereiro/Março 1979

C. D. U. 519.24/25/27/28:622.1:550

PEREIRA, Henrique Garcia — *Introdução às variáveis regionalizadas*, «Técnica», Lisboa, LIV (451/ /452) Jan./Fev./Mar. 1979, p. 89-96.

Introduz-se a noção de Variável Regionalizada no seu duplo aspecto aleatório e estrutural. Dão-se exemplos de Variáveis Regionalizadas nos domínios geológico e mineiro e sugere-se, em Referências Bibliográficas existentes no CVRMUL, outras aplicações. Interpretam-se as Variáveis Regionalizadas como realização de uma Função Aleatória e introduzem-se hipóteses restritivas. Define-se o variograma como instrumento básico da Geoestatística e estudam-se algumas das suas propriedades como revelador de estruturas.

Indica-se o método de cálculo do variograma experimental e listam-se alguns modelos teóricos ajustáveis.

C. D. U. 519.25/27/28:622.1

CORTEZ, Leopoldo Parreira — *Introdução à estimação geoestatística*, «Técnica», Lisboa, LIV (451/ /452) Jan./Fev./Mar. 1979, p. 97-137.

O problema da estimação geoestatística consiste na inferência de estimadores de certas características globais ou médias de um determinado domínio (por exemplo, a reserva total ou o teor médio de um jazigo mineral), com base na informação obtida através de uma amostragem parcelar, e na quantificação da precisão dessa estimação. Esta quantificação é feita através da variância de estimação, e utiliza o variograma das variáveis regionalizadas que definem as características a estimar, como instrumento de trabalho.

Neste capítulo fornecem-se as funções teóricas do cálculo das variâncias de estimação e indicam-se alguns processos práticos para a realização desse cálculo. A finalizar, apresentam-se duas aplicações concretas da estimação geoestatística, respectivamente à optimização do reconhecimento de um jazigo filoneano sub-vertical por galerias de nível amostradas por rouços, e ao cálculo global da reserva em minério e em metal e do teor médio de um jazigo estratiforme amostrado por uma malha regular de sondagens.

C. D. U. 519.25/27/28:622

MUGE, Fernando Humberto — *Prática de Krigagem*, «Técnica», Lisboa, LIV (451/452) Jan./Fev./Mar. 1979, p. 139-150.

Introduz-se a noção de estimador linear optimizante — estimador de Krigagem. Constroi-se o sistema de Krigagem para o caso estacionário. Dão-se exemplos de variáveis regionalizadas em que não é válida a hipótese de estacionaridade e definem-se para estes casos os estimadores de Krigagem Universal.

Dão-se exemplos de Krigagem de variáveis intercorrelacionadas (Cokrigagem) e constroi-se o respectivo sistema de Cokrigagem.

Indica-se a estrutura básica de um programa de Krigagem.

C. D. U. 519.24/25/27/28:622:550

ROGADO, José Quintino — *Uma nova parametrização de jazidas minerais*, «Técnica», Lisboa, LIV (451/452) Jan./Fev./Mar. 1979, p. 151-156.

Apontam-se algumas limitações à prática habitual do critério de rejeição baseado sobre pequenos blocos e respectivo teor tal-qual.

É-se assim conduzido à consideração do bloco de beneficiamento e à construção da característica optimal, a qual permite orientar a escolha do projecto optimal e, traduz, portanto a parametrização mais significativa.

Mostra-se seguidamente que o controlo do desmonte é realizado após parques de homogenização e desenvolve-se a teoria básica que permite a avaliação das políticas de constituição e retoma de tais parques.

Synopsis of articles published in «Técnica» n.° 451/452

LIV — January/February/March 1979

U. D. C. 519.25/27/28:622

MUGE, Fernando Humberto — *The practice of Kriging*, «Técnica», Lisboa, LIV (451/452) Jan./Feb./Mar. 1979, p. 139-150.

It is introduced the notion of best linear unbiased estimator — Kriging estimator. It is presented the Kriging system of equations for the stationary case.

They are given examples of regionalized variables for the non stationary case and are defined, for these cases, the best linear unbiased estimator — Universal Kriging estimator.

They are also given examples in which are kriged intercorrelationated variables (cokriging) and is presented the respective cokriging system.

It is shown the basic structure of a Kriging program.

U. D. C. 519.24/25/27/28:622.1:550

PEREIRA, Henrique Garcia — *Introduction to the regionalized variables*, «Técnica», Lisboa, LIV (451/452) Jan./Feb./Mar. 1979, p. 89-96.

The theory of Regionalized Variables is introduced by its structural and random features. Examples of the variables in the geological and mining fields are presented and other applications are suggested. The Regionalized Variables are studied as a realization of Random Functions and work hypothesis are introduced. The variogram is definned as the basic tool of Geostatistics and some of its applications as structure depictor are discussed.

The method for experimental variogram calculation is described and some theoretical models are adjusted.

U. D. C. 519.24/25/27/28:622:550

ROGADO, José Quintino — *A new parametrical description of ore bodies*, «Técnica», Lisboa, LIV (451/452) Jan./Feb./Mar. 1979, p. 151-156.

Some limitations are pointed out concerning the usual cut off criterion based on small blocks and respective crude ore grades.

By this via the concepts of beneficiation block and optimal chracteristic are built up. This characteristic is useful for framing the design of the optimal mining project. Thus, it is the convenient way for the parametric description of an ore body.

It is also shown that the exploitation control is usually carried out on the output of a stockyard. The theoretical basis which governs the adequate stacking and reclaiming stockyard policies is developed.

U. D. C. 519.25/27/28:622.1

CORTEZ, Leopoldo Parreira — *Introduction to geostatistical estimation*, «Técnica», Lisboa, LIV (451/452) Jan./Feb./Mar. 1979, p. 97-137.

Geostatistical estimation deals with inference of estimators for some global or mean characteristics of a certain space based on discontinuous sampling, and with the precision of this estimation, which is quantified by the estimation variance; the fundamental function in error computations is the variogram.

Theoretical basis for calculation of estimation variances are referred, and some practical processes are proposed. In the last part, two examples of applications are given, respectively to the optimization of the sampling of a vein orebody recognized by horizontal galleries, and to the global ore reserve and mean grade estimations of a stratiform orebody recognized by a regular pattern of drill holes.

EM LÍNGUA PORTUGUESA

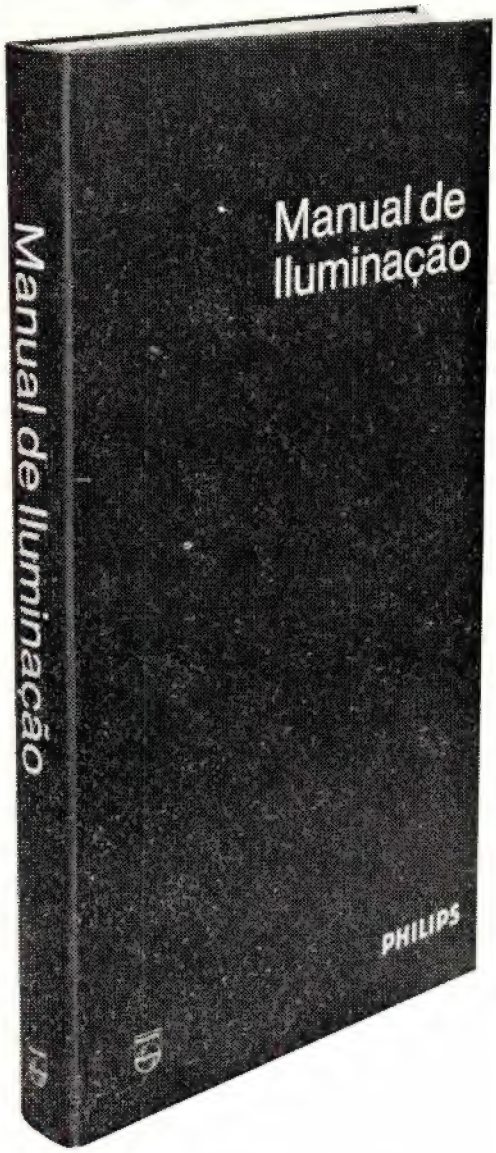
Manual de Iluminação

editado pela Philips' Gloeilampenfabrieken, Eindhoven, Holanda

Principais capítulos:

ILUMINAÇÃO INTERIOR E EXTERIOR
ILUMINAÇÃO PARA PRÁTICA DE DESPORTOS
APLICAÇÕES ESPECIAIS
PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS DA LUZ
TABELAS
ESQUEMAS DE ILUMINAÇÃO
ORGANIZAÇÕES INTERNACIONAIS
ÍNDICE DE PUBLICAÇÕES DIVERSAS

Formato de bolso
Preço — 200$00
acrescido do porte de correio



Pedidos para:

PHILIPS PORTUGUESA, SARL
Departamento de Iluminação
Av. Engº Duarte Pacheco, 6 • LISBOA 1

ESPIRAL CP 169/70

TOPOGRAFIA GERAL

1.º VOLUME

Pelo Engenheiro

A. C. XEREZ

❋

Preço de cada volume

350$00

❋

DESCONTO:

10 o/o aos Assinantes

PEDIDOS À TÉCNICA

tectos
divisórias
pavimentos
G.T.R. PARA CRIAR NOVOS AMBIENTES
Um novo espaço à sua medida, rapidamente, a seu gosto, de acordo com as suas necessidades.
G.T.R. é material modulado de alta qualidade técnica.
Pavimentos para computadores, tectos falsos e divisórias patenteadas Cloisall.
G.T.R. a resposta exacta aos seus problemas de espaço.
G.T.R. é decoração, acabamento perfeito, longa vida, versatilidade, rapidez de montagem.
G.T.R. – Gabinete Técnico de Revestimentos garante a produção e entrega dos seus materiais.
Somos G.T.R. – Gabinete Técnico de Revestimentos, Lda.
Consulte-nos. Estamos na Rua Rodrigo da Fonseca, 52-1.º E.
Lisboa 1 – telef. 535217 - 561088 - 575466
G.T.R. – Um novo espaço à sua medida!
CLOISALL
gabinete tecnico de revestimentos, lda.

Resumo dos Artigos publicados na «Técnica» n.os 451/452

Ano LIV — Janeiro/Fevereiro/Março 1979

C. D. U. 519.28:622

MARQUES, João Carvalho — *Teoria e prática de amostragem de materiais a granel segundo o formalismo de P. Gy*, «Técnica», Lisboa, LIV (451/452) Jan./Fev./Mar. 1979, p. 157-201.

Explicam-se os mecanismos geradores dos diferentes erros de amostragem, identificam-se as variáveis de que dependem, estimam-se os seus dois primeiros momentos e determinam-se as «qualidades» que uma amostragem deve possuir e como se pode, na prática, assegurar-lhas. São analisados os processos fundamentais de amostragem — partilha e implantação de incrementos — através de dois modelos matemáticos: Modelo Probabilista e Modelo de Integração, utilizando a Estatística Clássica e Geoestatística.

Apresentam-se exemplos de aplicação a materiais a granel da indústria mineira, nomeadamente concepção e cálculo de instalações automáticas de amostragem.

Tem, contudo, maior generalidade, sendo aplicável a materiais a granel de outras indústrias, nomeadamente metalúrgica, química, farmacêutica, agrícola e alimentar, do cimento, do vidro, da cerâmica e do papel, a resíduos urbanos e industriais e ainda a materiais contínuos, sólidos ou líquidos, como chapas, barras, lingotes e produtos metalúrgicos fundidos em deslocamento.

C. D. U. 519.28:622.1/2/7:550.4/7:553

PEREIRA, Henrique Garcia — *Introdução à simulação*, «Técnica», Lisboa, LIV (451/452) Jan./Fev./Mar. 1979, p. 209-224.

Os princípios da simulação estocástica são discutidos na sua generalidade e o Método de Monte Carlo é descrito brevemente.

Aplicações da Simulação Estocástica nos diferentes domínios das Ciências da Terra são referidas no texto e bibliografia existente no CVRMUL é indicada para cada caso específico.

Os domínios considerados são a Geologia e Prospecção, Exploração e Tratamento de Minérios e finaliza-se com a Análise económica global de um projecto mineiro.

C. D. U. 519.24/25/28:622.1:550

ROGADO, José Quintino — *Representatividade da amostragem de jazidas minerais*, «Técnica», Lisboa, LIV (451/452) Jan./Fev./Mar. 1979, p. 203-208.

São analisados aspectos da representatividade da amostragem de jazidas minerais destinada a ensaios mineralúrgicos e metalúrgicos.

É definida população de referência e apresentada metodologia para a reproduzir por amostragem e apresenta-se um exemplo real extraído do estudo de extensa bacia carbonífera Brasileira.

C. D. U. 519.28:622

DOWD, Peter — *Simulação condicional de variáveis regionalizadas*, «Técnica», Lisboa, LIV (451/452) Jan./Fev./Mar. 1979, p. 225-234.

A teoria da simulação condicional de variáveis regionalizadas é introduzida e as propriedades da variável simulada são descritas.

O método das bandas rotativas para a simulação não condicional a três dimensões é apresentado, bem como a simulação a uma dimensão obedecendo a uma covariância dada e a um histograma experimental.

Os problemas de anisotropia, efeito de pepita e deriva são introduzidos na teoria e estudadas as modificações a realizar para que esses aspectos estruturais sejam tomados em conta.

Alguns exemplos são apresentados para ilustrar as aplicações da teoria.

Synopsis of articles published in «Técnica» n.os 451/452

LIV – January/February/March 1979

U. D. C. 519.28:622.1/2/7:550.4/7:553

PEREIRA, Henrique Garcia — *Introduction to simulation*, «Técnica», Lisboa, LIV (451/452) Jan./Feb./Mar. 1979, p. 209-224.

The principles of stochastic simulation are briefly discussed and Monte Carlo method is described.

Applications of stochastic simulation in some fields of the Earth Sciences are referred and references are given for each specific case.

The main fields treated are geology and exploration, mine planning and ore dressing. The global economic study of a mining venture is also introduced in a case story.

U. D. C. 519.28:622

MARQUES, João Carvalho — *Particulate material sampling theory and practice by P. Gy formalism*, «Técnica», Lisboa, LIV (451/452) Jan./Feb./Mar. 1979, p. 157-201.

The paper explains all types of sampling errors and estimates their first and second moments. It defines the «qualities» and the rules to respect in sampling procedure.

The main sampling procedures are studied through two mathematical models: Probabilistic and Integration Models, developed by Classical Statistics and Geostatistics.

Applications to bulk materials of mining industry namely predesign of automatic sampling plants.

The models can be applied to bulk materials of many other industries such as Metalurgical, Chemical, Food, Agriculture, Concrete, Glass, Ceramics and Paper, to industrial and city wastes and even to continuos solid and liquid materials such as ingots, rods, bars, steel plates and fused metalurgical products in continuos mooving.

U. D. C. 519.28:622

DOWD, Peter — *The conditional simulation of regionalized variables*, «Técnica», Lisboa, LIV (451/452) Jan./Feb./Mar. 1979, p. 225-234.

The conditional simulation theory of Regionalized Variables is introduced and the basic properties of the simulated variable are described.

The turning bands method for non-conditional simulation in a three-dimensional space is presented as well as the one-dimensional simulation generated by a given covariance function and experimental histogram.

Problems of anisotropy, nugget effect and drift are introduced in the theory and modifications for taking these structural features into account are done accordingly.

Some case stories are presented for application of the theory.

U. D. C. 519.24/25/28:622.1:550

ROGADO, José Quintino — *Representativity of ore bodies sampling*, «Técnica», Lisboa, LIV (451/452) Jan./Feb./Mar. 1979, p. 203-208.

Comments are developed on the representativity of ore bodies sampling for obtaining data concerning the behaviour on concentration and metallurgical processes.

The reference population is defined and some methods for reproducing it are presented.

An example taken from a study carried out in a Brazilian coal basin is summarized.

Resumo dos Artigos publicados na «Técnica» n.os 451/452

Ano LIV — Janeiro/Fevereiro/Março 1979

C. D. U. 338.5:519.28:622

SANTOS, Heitor Simões — *Avaliação económica de projectos mineiros por simulação*, «Técnica», Lisboa, LIV (451/452) Jan./Fev./Mar. 1979, p. 235-260.

Dado o carácter prático deste trabalho, e estando ele integrado no Seminário de Geomatemática, onde outros trabalhos apresentam os conceitos teóricos da simulação, estes aspectos não são incluídos aqui.

Por outro lado, sendo este processo de simulação uma aplicação à Análise Económica de Projectos admite-se que:

— São conhecidos os conceitos necessários ao Discounted-Cash-Flow.
— Um projecto/exemplo está disponível e já foi explicado.
— São conhecidos os princípios básicos da Informática.

Para satisfazer os dois primeiros pontos o leitor deve remeter-se ao anexo, onde de uma maneira sucinta se relembram os conceitos, se introduz o projecto/exemplo, e se analisa o efeito de variações discretas (Análise de Sensibilidade).

Neste trabalho propriamente dito, expõe-se a estrutura do processo de simulação, apresentando o projecto/exemplo na óptica dos conceitos probabilísticos (Análise do Risco).

C. D. U. 622.2:519.28

COSTA, J. Beja e VALENTE, Jorge — *Programação de desmontes em lavra subterrânea*, «Técnica», Lisboa, LIV (451/452) Jan./Fev./Mar. 1979, 271-291.

A exploração de minério de ferro da «Companhia Mineira do Lobito, S. A. R. L.» (Cassinga-Angola; 6×10^6 ton/ano de concentrados) foi programada, durante 6 anos, com sucesso na estacionarização de parâmetros, tais como o número de máquinas em operação nos desmontes, o teor dos concentrados e o respectivo rendimento em peso, assim como na repartição de finos (1/5 mm) nesses concentrados. Nesta programação de desmonte introduziram-se ainda alguns melhoramentos, tais como a optimização da recuperação em peso, com a introdução de um algoritmo computorizado e mantendo simultaneamente o teor em ferro dos concentrados num certo valor pré-determinado; um outro melhoramento foi o estabelecimento de uma sequência de desmonte que define as combinações de blocos a serem desmontados simultaneamente ou sequencialmente, de forma a se assegurar as condições descritas anteriormente.

Este método de programação é agora adaptado ao caso particular das minas subterrâneas e é demonstrada a forma de relacionar o cálculo dos diferentes tipos de equipamento destas minas pela primeira vez, segundo supomos.

No final descreve-se um exemplo prático de aplicação do método; este exemplo refere-se à Mina do Moinho (Aljustrel) de «Pirites Alentejanas, S.A.R.L.».

C. D. U. 519.28:622.271

MUGE, Fernando Humberto — *Determinação do contorno final dum desmonte a céu aberto («Ultimate Pit»)*, «Técnica», Lisboa, LIV (451-452) Jan./Fev./Mar. 1979, p. 261-270.

Formula-se na sua generalidade o problema da determinação do contorno final dum desmonte a céu aberto.

Descreve-se o algoritmo de Lerchs e Grossman com base em noções da teoria dos grafos.

Introduz-se o método dos cones deslizantes aplicado ao algoritmo de Lerchs e Grossmann e dá-se um exemplo de aplicação. Descreve-se a estrutura básica de um programa que utiliza este método.

C. D. U. 622.73/765

OBLAD, Alex — *Métodos estocásticos e determinísticos de análise e simulação em processos da metalurgia extractiva*, «Técnica», Lisboa, LIV (451/452) Jan./Fev./Mar. 1979, p. 293-313.

Neste artigo apresentam-se métodos correntemente usados na construção e análise de modelos empíricos pela via estocástica clássica e também recorrendo a modelos determinísticos recentemente criados. Nesta última óptica e usando o modelo de balanço generalizado em sistemas de partículas, tratam-se aplicações à moagem discontínua/contínua, à flutuação e à lixiviação.

Synopsis of articles published in «Técnica» n.os 451/452

LIV – January/February/March 1979

U. D. C. 622.2:519.28

COSTA, J. Beja e VALENTE, Jorge — *The transportation system planning in underground mining*, «Técnica», Lisboa, LIV (451/452) Jan./Feb./Mar. 1979, 271-291.

The exploitation of the iron ores of «Companhia Mineira do Lobito, S. A. R. L.» (Cassinga-Angola: 6×10^6 PPY of concentrates) is based upon a sophisticated planning schedule which, for six years, has been successful in keeping several pertinent parameter steady, such as the number of operating machines in the mine, the iron content and the weight recovery of the concentrates, as well as the proportion of fines (1/5 mm) in such concentrates. In this planning schedule some improvements was introduced, such as the optimization of the obtained weight recovery, with the introdution of a computerized optimization algorithm, and simultaneously keeping the iron content of the concentrates at a predetermined value; another improvement was the establishment of working criteria for the mine which define the combination of blocks to be simultaneously or sequentially treated in order to ensure the conditions described.

All this method is now, in the present text, adaptated to the particular case of the underground mines and the way to relationate the calculation of the number of the diferent types of equipment used in that mines is shown, we suppose, for the first time.

In the end, a pratical example of the method is also described; this example concerns to the Mina do Moinho (Aljustrel) of the Company «Pirites Alentejanas, S. A. R. L.».

U. D. C. 338.5:519.28:622

SANTOS, Heitor Simões — *Mining projects under risk analysis concepts*, «Técnica», Lisboa, LIV (451/452) Jan./Feb./Mar. 1979, p. 235-260.

As this paper intends to be a practical one as well as a part of the present semminar, where theoretical concepts on simulation were already introduced, the former part was skipped.

On the other hand, being «This Simulation Process» concerned with the Economic Analysis of the Projects three points are assumed:

- Modern concepts of Econ. An. of Proj. (DCF) are known.
- A project/example is available and alrealy explained.
- Basic concepts on the computer science are required.

Excluding the last point, the reader is reverted to the Annex, where a short introduction on DCF is available (as reminder) as well as the Project/Example being introduced in order to clear the structure and the concepts explored on discrete variations (Sensitivity Analysis).

Therefore, the present paper is concerned with the structure of a simulation process, presenting The Project/Example under the probabilistic concepts (Risk Analysis).

U. D. C. 622.73/765

OBLAD, Alex — *Process analysis and simulation in extractive metallurgy by stochastic and deterministic methods*, «Técnica», Lisboa, LIV (451/452) Jan./Feb./Mar. 1979, p. 293-313.

This paper deals with current methods used in construction and analysis of empirical models by the classical stochastic approach and with recent developments in deterministic models. These latter include the applications of a generalized population balance model for particulate systems to the operations of batch/continuous grinding, flotation, and concentrate leaching.

U. D. C. 519.28:622.271

MUGE, Fernando Humberto — *Determination of an optimal Ultimate Pit contour*, «Técnica», Lisboa, LIV (451/452) Jan./Feb./Mar. 1979, p. 261-270.

The problem of the determination of an ultimate pit contour in order to maximize some objective fonction is formulated in all its generality.

It is described the Lerchs and Grossmann alghoritm based in concepts of the graphs theory.

It is introduced the moving cone method applied to the Lerchs and Grossmann alghoritm and it's given an example of application. It is described the basic structure of a computer program which performs the above mentioned method.

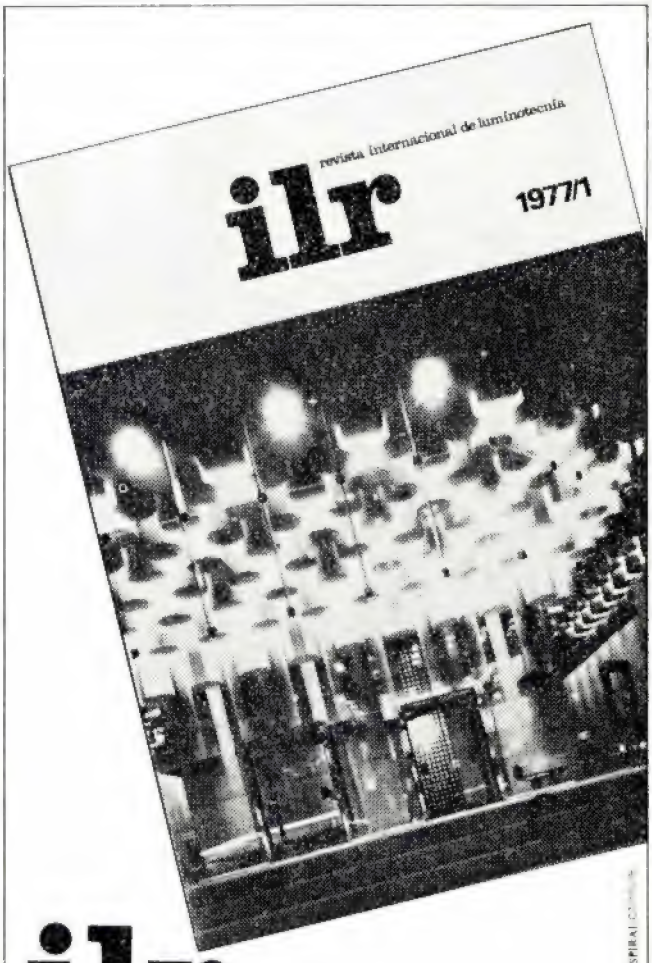
PARA:

ECONOMIZAR ENERGIA
COMBATER A POLUIÇÃO
POUPAR TEMPO
DEVOLVER AO PEÃO OS ESPAÇOS DE QUE CARECE

M METROPOLITANO

UMA SOLUÇÃO EFICAZ
NO DOMINIO DOS TRANSPORTES
COLECTIVOS URBANOS

METROPOLITANO DE LISBOA



ESPIRAL

ilr

revista internacional de luminotecnia

Publicação trimestral, a côres, com informação sobre os mais importantes domínios de aplicação em iluminação interior, exterior, instalações especiais, fotometria, etc. Grande variedade de temas e artigos por autores de grande prestígio editada por "Stichting Prometheus" — Amsterdão. Recomendada pela Philips a arquitectos, engenheiros, decoradores, estudantes, firmas instaladoras, empresas comerciais e industriais, estabelecimentos de ensino, Museus, Serviços Municipalizados, Federações de Municípios, gabinetes de apoio técnico, estaleiros, gabinetes de estudos e projectos, construções hospitalares, organizações desportivas, gabinetes do planeamento de vias públicas, auto-estradas, pontes e túneis, empreendimentos turísticos, bibliotecas, etc.

32 páginas a cores
4 publicações por ano

Assinatura anual 240$00
acrescido de portes de correio

Pedidos de assinatura a:

PHILIPS PORTUGUESA, SARL

Departamento de Iluminação
Av. Eng.º Duarte Pacheco, 6
LISBOA 1

HIDRÁULICA GERAL

1.º VOLUME

— FUNDAMENTOS TEÓRICOS

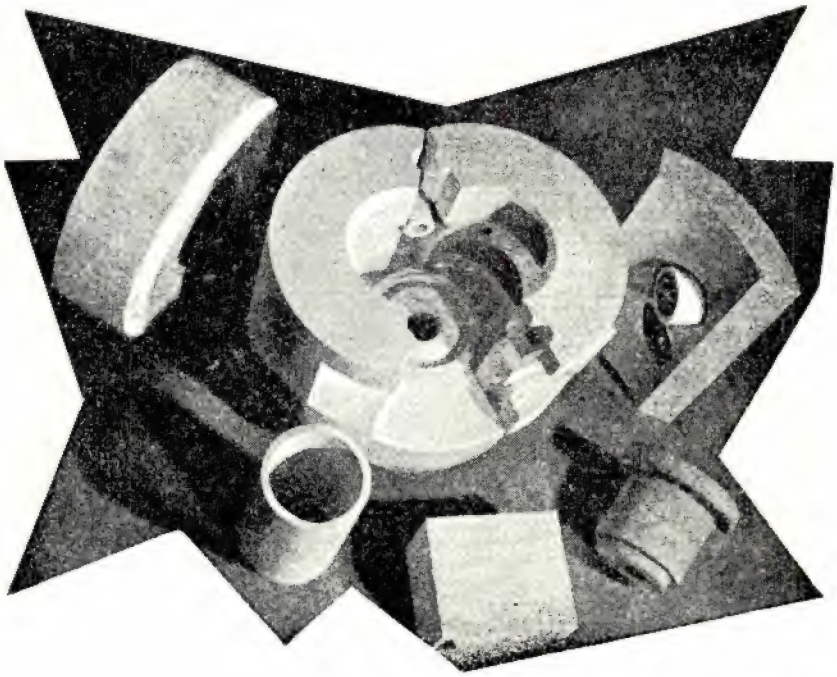
Pelo Engenheiro

Alberto Abecasis Manzanares

A SAIR BREVEMENTE

a técnica moderna emprega

BETÕES REFRACTÁRIOS



à base dos cimentos

FONDU LAFARGE

e

SECAR 250

porque são

práticos
eficientes
económicos

REFRACTÁRIOS ATÉ 1800° C

REFRACTÁRIOS ISOLANTES ATÉ 1700° C

Os nossos serviços técnicos, especializados, estão à vossa inteira disposição para estudar, sem qualquer encargo da vossa parte, a adaptação dos **BETÕES REFRACTÁRIOS** a todos os vossos problemas

AGUIAR & MELLO L.DA

P. do Município, 13-1.º — LISBOA — Tel. 32 11 51/2

ACESSÓRIOS FORJADOS PARA CABO DE ARAME E CADEIAS

Os homens que dão valor às suas vidas e a cargas insistem nos grampos, algemas, rótulas, tensores, olhais, fichas, mangas, parafusos para olhais e retentores de cargas Lebus da Crosby . . . todos fabricados de aço reformado e temperado para maior resistência. Uma gama completa de talhas McKissick e Western e protectores para cabos de arame.

Para obter o catálogo ou mais informações, queira contactar:

the Crosby group

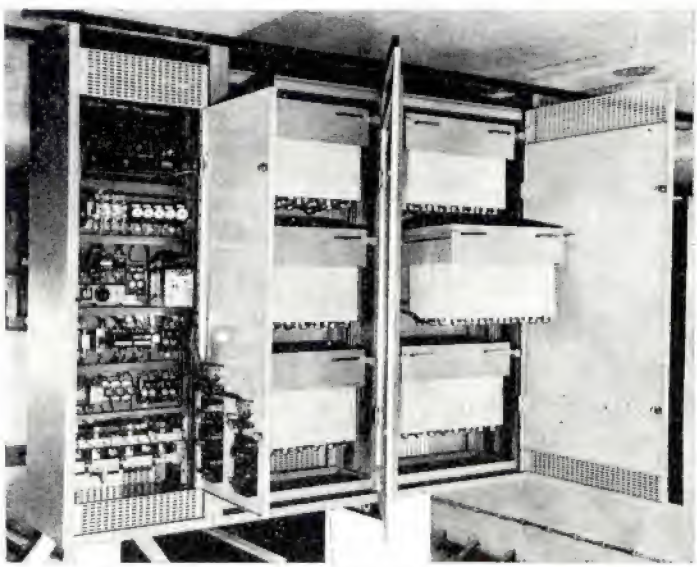
amhoist AMERICAN HOIST INTERNATIONAL CORPORATION

Crosby LAUGHLIN (UK) LTD
Carlton Chambers,
Station Road, Shortlands,
Bromley BR2 0EY, England.
Telex 896558CLUK

N.V. Crosby EUROPE
Leuvensebaan 51
2870 Putte (Mechelen)
Belgium
Telex 25312

TUDOR

Alimentadores de C.C. para Serviço Estacionário



BLOCO para alimentação de permanência e Socorro dos equipamentos de Protecção e Comando dos Serviços Auxiliares das subestações.
Fabricado para a EDP e E.P.

A TUDOR projecta e fabrica alimentadores e carregadores de baterias para todos os fins obedecendo às mais exigentes especificações.

Características Eléctricas

Carregador Principal

- Tensão de alimentação . . 3 x 380 V ± 10% 50 Hz ± 5%
- Potência Nominal . . . . .3x3 KW
- Funcionamento . . . . . .Regime flutuante estabilizado

Carregador Adicional

- Potência Nominal . . . . .0,3 KW
- Funcionamento . . . . . .Regime Tampão

Bateria

- Alcalina de Cádmio Níquel

SOCIEDADE PORTUGUESA DO ACUMULADOR TUDOR, SARL. R. Actor Tasso 1 — Tel. 56 21 12

Resumo dos Artigos publicados na «Técnica» n.os 451/452

Ano LIV — Janeiro/Fevereiro/Março 1979

C. D. U. 519.24/25/27/28:622:550

GUIBAL, D. — *A parametrização das reservas*, «Técnica», Lisboa, LIV (451/452) Jan./Feb./Mar. 1979, p. 315-319.

Distinguem-se dois aspectos da parametrização prática das reservas de um jazigo — a parametrização técnica, em que se pretende obter o valor do teor de corte que maximiza a quantidade de metal para uma tonelagem fixada e uma optimização económica.

Desenvolve-se a parametrização técnica tratando o caso da selecção livre e o caso da selecção sob constrangimentos geométricos que podem referir-se a jazigos estratiformes e a desmontes a céu aberto.

C. D. U. 519.28:338.5:622

DOWD, Peter — *Aplicações da programação dinâmica à determinação de teores de corte*, «Técnica», Lisboa, LIV (451/452) Jan./Feb./Mar. 1979, p. 321-332.

A determinação das sequências óptimas de teores de corte e ritmos de produção durante a vida de uma mina é um problema que tem sido particularmente debatido nos últimos 15 anos.

O propósito desta comunicação é o de apresentar o problema no quadro da programação dinâmica: determinística ou estocástica. O primeiro aspecto cobre os casos em que os preços e custos envolvidos podem ser perfeitamente fixados e o último quando estão sujeitos a flutuações aleatórias podendo-se antecipar o seu valor em probabilidade.

Synopsis of articles published in «Técnica» n.os 451 452

LIV – January/February/March 1979

U. D. C. 519.28:338.5:622

DOWD, Peter — *Dynamic programming and its application to cut-off grade problems,* «Técnica», Lisboa, LIV (451-452) Jan./Fev./Mar. 1979, p. 321-332.

The determination of optimal sequences of cut-off grades and production rates over the life of a mine is a problem that has received much attention in mining literature, especially during the last 15 years. The aim of this paper is to present the problem as a deterministic ar stochastic program. The former represents the case when future prices and costs can be perfectly predicted, and the later when they are subject to random changes and can be predicted in terms of probabilities.

U. D. C. 519.24/25/27/28:622:550

GUIBAL, D. — *Le parametrage des reserves,* «Técnica», Lisboa, LIV (451-452) Jan./Fev./Mar. 1979, p. 315-319.

Two features of the pratical ore reserve parametrization of an orebody are developed — the thechnical parametrization, in which the aim is to calculate the cut off grade that maximizes the metal content for a fixed tonnage and the economical optimization.

The technical parametrization is emphasized in two cases — the free selection and the selection under geometric constraints in stratigraphic deposits or open pit operations.

ERRATA

TÉCNICA 449/450

ALGUNS ASPECTOS DA CORRELAÇÃO DE 3.ª ORDEM E DO BISPECTRO DOS PROCESSOS ESTACIONÁRIOS

F. E. REBELO SIMÕES

ONDE SE LÊ	DEVE LER-SE
pág. 65 — 26.ª linha ...limitado a 1000 Hz tem-se como...	...limitado a 1000 Hz, e dividindo este intervalo em 8 bandas de 125 Hz, tem-se como...

PELO LAPSO PEDIMOS DESCULPA AO AUTOR E AOS LEITORES.

BIBLIOTECA DO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA LISBOA

OFERTA

Edições da Técnica

TABELA DE PREÇOS

TABELAS PARA O CÁLCULO DO BETÃO ARMADO

Brazão Farinha, 6.ª edição — 1970 . . . 450$00

TOPOGRAFIA GERAL

C. Xerez — 1.º vol. 3.ª edição — 1978 . . 350$00

C. Xerez — 2.º vol. 2.ª edição — 1966 . . 250$00

TABELAS TÉCNICAS

Vicente Ferreira e Brazão Farinha, 8.ª edição 1977 500$00

MANUAL DE HIDRÁULICA GERAL

A. Lencastre, 2.ª edição — 1969 . . . . 450$00

DICIONÁRIO DE UNIDADES E TABELAS DE CONVERSÃO

Vasco Costa e Osvaldo Francês, 1.ª edição — 1959 75$00

NÚMEROS E VARIÁVEIS COMPLEXAS

A. H. Simões de Abreu, 1.ª edição 1977 . . 312$50

(*) LIVROS A PUBLICAR BREVEMENTE

GUIA DE ANÁLISE QUÍMICA DAS ÁGUAS

A. Herculano de Carvalho, 1.ª edição — 1961 150$00

CÁLCULO DE PÓRTICOS

G. Kani — Trad. da 7.ª edição alemã — 1962 100$00

MANUAL DE ESTRUTURAS

Brazão Farinha — 1.º VOLUME

Encadernado . . . . . 625$00

Plastificado . . . . . 587$50

2.º e 3.º Volumes . . . . . (*)

BETÃO PREESFORÇADO

(A cargo dos participantes na Semana de Betão Preesforçado — I. S. T. — 1975) . . 425$00

HIDRÁULICA GERAL

Alberto Abecassis Manzanares

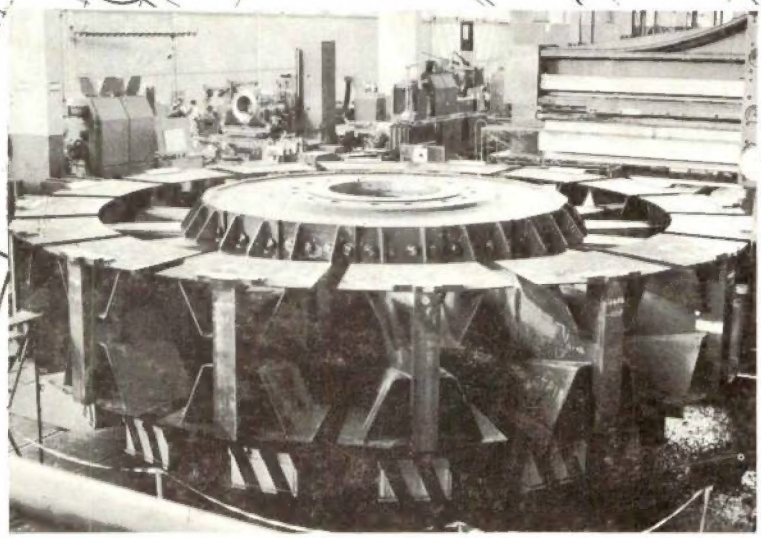
1.º e 2.º Volumes . . . . . (*)

Desconto de 10% aos assinantes

PEDIDOS À técnica

PRIMEIRO ALTERNADOR MOTOR FABRICADO EM PORTUGAL

AGUIEIRA



Rotor alternador em fase de maquinagem

Destinado à Central Hidroeléctrica da Aguieira e sob licença da Alsthom-Atlantique a Sorefame fabrica o primeiro Alternador Motor tendo como principais características:

Potencia	100 MVA
Velocidade de rotação	125 r. p. m.
Tensão nominal	12 000 volts
Diâmetro exterior	11,5 m
Diâmetro da parte girante	9,5 m
Peso do rotor	225 toneladas
Peso total	420 toneladas

SOREFAME

SOCIEDADES REUNIDAS DE FABRICAÇÕES METÁLICAS, S.A R L.

Amadora – Portugal